

SOLUTION OF 2D CANTILEVER BEAM BY USING THE ELEMENT FREE GALERKIN METHOD WITH THE FINITE ELEMENT METHOD

Mahmut PEKEDİS, Hasan YILDIZ*

Ege Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü 35100- Bornova/İZMİR

Received/Geliş: 05.09.2008 Revised/Düzelme: 18.02.2009 Accepted/Kabul: 23.02.2009

ABSTRACT

The Element Free Galerkin (EFG) method based on Galerkin formulation, which was developed as an alternative to the finite element method has been used widely in solution of engineering problems for last two decades. In this study, new and popular EFG method was applied to a simple solid mechanics problem. As a numerical example, a 2D elastic cantilever beam fixed at one end and subjected to traction at the other free end is investigated. Moving least squares approximation is used as a shape functions. Displacement values u_x and u_y and solution time obtained by using EFG are compared with analytical solution and the finite element results. As a result, it can be concluded that the accuracy and efficiency of element free Galerkin method solutions are better than the results of the finite element method.

Keywords: Messless methods, the finite element method, element free galerkin, cantilever beam.

İKİ BOYUTLU ANKASTRE KİRİŞİN ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN METODU VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Galerkin çözüm prosedürüne dayanan Eleman Bağımsız Galerkin (EBG) metodu son yirmi yıldır sonlu elemanlar yöntemine alternatif olarak geliştirilmiş olup mühendislik problemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada yeni ve popüler olan EBG metodu basit bir katı cisim mekaniği problemine uygulanmıştır. İncelenen nümerik örnek olarak bir ucu ankastre diğer ucu da zorlanmaya maruz bırakılan iki boyutlu elastik kiriş incelenmiştir. EBG metodu kullanılarak elde edilen u_x ve u_y yer değiştirme değerleri ve çözüm süreleri, analitik çözüm ve sonlu elemanlar sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak incelenen problem için eleman bağımsız Galerkin yöntemi doğruluk ve verimlilik bakımından sonlu elemanlar yönteminden daha iyi olduğu kararına varılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Ağsız yöntemler, sonlu elemanlar yöntemi, eleman bağımsız galerkin, ankastre kiriş.

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, analitik çözümlerin yanında alışılmış olarak sonlu farklar, sonlu hacimler, sonlu elemanlar gibi çeşitli sayısal yöntemler kullanılarak çözülmektedir. Lakin bu yöntemlerin kullanılması sırasında bazı zorluklar yaşanmaktadır. Bu yöntemlerden en çok kullanılan Sonlu Elemanlar Yöntemi'nde (SEY) karşılaşılan zorluklardan bir tanesi çözüm ağının

*Corresponding Author/Sorumlu Yazar: e-mail/e-ileti: hasan.yildiz@ege.edu.tr, tel: (232) 388 40 00 / 1897

oluşturulmasıdır. Ayrıca SEY, yüksek deformasyonlu ve çok sayıda elemana sahip problemlerin çözümünde sorunlar çıkarmaktadır. Bunun yanında yapısal çatlak ilerlemesi problemlerinde yeniden çözüm elde etmek için tekrar ağ türetilmesi de karşılaşılan zorluklardan bir başkasıdır. Sonlu elemanlar yönteminde alışılmış ağ tekniğiyle bu gibi zorlukların üstesinden gelmek oldukça zordur. Mevcut yöntemlerdeki bu tür sıkıntılardan dolayı ağız yöntemlerle çözüm teknikleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerde ağ bulunmamakta ve düzenli bir şekilde dizilimi gerekmeyen düğüm noktaları kullanılmaktadır. Ağ oluşturmada karşılaşılan zorluklar bu metotta görülmez. Bu nedenle mühendislik uygulamalarında daha esnek bir yaklaşım sunar.[1]

Ağız yöntemler birçok araştırma grubunun üzerinde yoğunlaştığı bir alan olup katı cisim mekaniğinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Geliştirilen ağız yöntemlerden Düz Parçacık Hidrodinamiği (DPH) [2], Yeniden Üretilen Çekirdek Parçacığı Yöntemi (YÜÇPY) [3,4], h-p toz bulutu [5], Ağız Yerel Petrov-Galerkin (AYPG) [6], Eleman Bağımsız Galerkin (EBG) metodu [7,8], gibi metotlar şekil fonksiyonlarının oluşturulmasında Nayroles tarafından [9] önerilen hareketli en küçük kareler yaklaşımı kullanırlar.

Bu çalışmada, bir ucu ankastre diğer ucuna yük uygulanan elastik bir kirişin iki boyutlu çözümünde, eleman bağımsız Galerkin yöntemi kullanılarak elde edilen yer değiştirme değerleri ve çözüm süreleri, sonlu elemanlar yöntemi ve analitik çözümden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

2. ELEMEN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİ

Bu metot ağız yöntemlerden en çok kullanılanlardan bir tanesidir. Metot şekil fonksiyonları olarak hareketli en küçük kareler yöntemi fonksiyonlarını kullanır. Bu yöntemde:

- Zayıf formdan sistem denklemleri türetilmesi için Galerkin prosedürü uygulanır.
- Arka plandaki ağla integrasyon uygulanır.

2.1. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi

Hareketli En küçük Kareler (HEK) metodu, özel noktalar arasında interpolasyonları üretmek için geliştirilmiştir. Bu metot prosedür olarak ağırlıklı en küçük kareler veri eşitlemesiyle aynı özelliği taşımaktadır. Tek farkı bu metodun her noktaya ayrı ayrı uygulanabilirliğidir.

HEK yaklaşımları; her düğüm etrafında bir destek oluşturan bir ağırlık fonksiyonu, bir polinom olan taban ve düğümün konumuna bağlı olan katsayılardan ibarettir. Her bir düğüm için, ağırlık fonksiyonu sadece düğüm etrafındaki destek denilen küçük bir bölgede (etki bölgesi) sıfırdan farklıdır. Bu etki bölgelerinin kesişimi düğümler arasındaki bağlantıyı sağlar. HEK yaklaşımlarının önemli bir özelliği sürekliliklerinin ağırlık fonksiyonun sürekliliğine bağlı olmasıdır [10]. HEK fonksiyonları genellikle verilerin tam üzerinden geçmediğinden, yaklaşımlar olarak tanımlanırlar. $u(x)$ fonksiyonunun yaklaşımı olan $u^h(x)$ sabit katsayılı olmayan m. dereceden bir polinom kullanılarak oluşturulmuştur. Polinomun derecesi taban fonksiyonunun derecesine eşittir.

x noktası civarındaki yerel yaklaşık fonksiyon,

$$u_L^h(x, \bar{x}) = p^T(x)a(x) \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$p^T(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^m] \quad (2)$$

$a(x)$ katsayıları,

$$a^T(x) = [a_0(x) \quad a_1(x) \quad a_2(x), \dots \quad a_m(x)] \quad (3)$$

dır. Bilinmeyen parametreler olan $a_j(x)$ değerleri bu noktada, yerel yaklaşım ve düğüm parametreleri arasında minimize edilmesiyle bulunur.

$$J = \sum_{I=1}^n w(x-x_I)[u_L^h(x_I, x) - u_I]^2 \quad (4)$$

$$= \sum_{I=1}^n w(x-x_I)[p^T(x_I)a(x) - u_I]^2$$

$$w(x-x_I) \neq 0 \quad (5)$$

J 'nin minimum değeri, (4) denkleminin $a(x)$ 'e göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{I=1}^n w(x-x_I)2p_1(x_I)[p^T(x_I)a(x) - u_I] &= 0 \\ \sum_{I=1}^n w(x-x_I)2p_2(x_I)[p^T(x_I)a(x) - u_I] &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{I=1}^n w(x-x_I)2p_m(x_I)[p^T(x_I)a(x) - u_I] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6) denklemini vektör ve tansörler kullanılarak tekrar yazılırsa;

$$\sum_{I=1}^n w(x-x_I)2p(x_I)[p^T(x_I)a(x) - u_I] = 0 \quad (7)$$

eşitliği elde edilir. Sabit terim olan 2 sayısını elimine edip değişkenler sağ tarafa atılırsa;

$$\sum_{I=1}^n w(x-x_I)p(x_I)p^T(x_I)a(x) = \sum_{I=1}^n w(x-x_I)p(x_I)u_I \quad (8)$$

bağıntısı bulunur.

$$A(x)a(x) = B(x)u \quad (9)$$

$$A(x) = \sum_{I=1}^n w(x-x_I)p(x_I)p^T(x_I) \quad (10)$$

$$B(x) = [w(x-x_1)p(x_1) \quad w(x-x_2)p(x_2) \quad \dots \quad w(x-x_n)p(x_n)] \quad (11)$$

Denklem (9)'dan $a(x)$ değişkeni çözümlenip denklem (1)'e yerleştirilirse hareketli en küçük kareler yaklaşımı aşağıdaki gibi olur.

$$u^h(x) = p^T(x)[A(x)]^{-1}B(x)u \quad (12)$$

Bilinen yaklaşık form şeklinde yazılırsa;

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^N \Phi_I(x) u_I = \phi^T u \quad (13)$$

olarak sadeleştirilir. Burada

$$\phi^T(x) = p^T(x) [A(x)]^{-1} B(x) \quad (14)$$

olur. x noktası için I düğüm noktasındaki şekil fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\phi_I(x) = p^T [A(x)]^{-1} w(x - x_I) p(x_I) \quad (15)$$

$A(x)$ matrisi moment matrisi olarak tanımlanır. Boyutu $m \times m$ 'dir. Bir boyutlu lineer hal için moment matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$A(x) = w(x - x_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ x_1 & x_1^2 \end{bmatrix} + w(x - x_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} + \dots + w(x - x_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n \\ x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Denklemden açıkça görüldüğü gibi eğer n değeri 1'e eşitse x noktası sadece bir nodal aralığı içeriyor anlamına gelmektedir. m değeri 2'ye eşit olursa matris tekil olup dönüştürülemez. Dönüştürülebilmesi için gerekli olan koşul $n \geq m$ 'dir. Lineer durum için temel fonksiyon aşağıda yazılmıştır.

$$p^T(x) = [1 \ x \ y] \quad (17)$$

Kuadratik durum için temel fonksiyon

$$p^T(x) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2] \quad (18)$$

olur.

2.1.1. Ağırlık Fonksiyonlarının Seçimi

Şekil fonksiyonlarının oluşturulabilmeleri için ağırlık fonksiyonların oluşturulması gerekir. Fonksiyonlar seçilirken bazı özellikleri taşıması gerekir. Örneğin, destek bölgesi içinde $w(x-x_i) > 0$, destek bölgesi dışında $w(x-x_i) = 0$ olacak şekilde seçilir.

Ağırlık fonksiyonları şekil fonksiyonlarının hassasiyetini önemli ölçekte etkilemektedir. Bu yüzden ağırlık fonksiyonları iyi bir şekilde seçilmesi gerekir.

En çok kullanılan ağırlık fonksiyonları kübik spline, kuartik spline ve Gauss fonksiyonları olup bu fonksiyonlar (19), (20), (21) denklemlerinde verilmiştir.

- Kübik spline fonksiyonu

$$W_i(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 6r_i^2 + 4r_i^3 & r_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4r_i + 4r_i^2 - \frac{4}{3}r_i^3 & 0.5 \leq r_i \leq 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \quad (19)$$

- Kuartik spline (W1) fonksiyonu

$$W_i(x) = \begin{cases} 1 - 6r_i^2 + 8r_i^3 - 3r_i^4 & r_i \leq 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \quad (20)$$

- Gauss (W2) fonksiyonu

$$W_i(x) = \begin{cases} e^{-(r_i/\alpha)^2} & r_i \leq 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \quad (21)$$

Yukarıdaki ifadelerde r_i

$$r_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|x - x_i|}{r_w} \quad (22)$$

burada $d_i = |x - x_i|$ ifadesi, incelenen x noktası ile x_i düğüm noktası arasındaki mesafedir. r_w parametresi ise ağırlık fonksiyonu için destek bölgesinin boyutunu (etkinlik yarıçapını) temsil etmektedir.

(22) bağıntısında x çözüm bölgesi bağımsız değişkeni x_i ifadesi ise seçilmiş olan düğümlerin çözüm bölgesindeki koordinatlarını belirtmektedir. Paydada yer alan r_w etkinlik yarıçapının değeri tamamen analizi yapan kişi tarafından seçilmektedir.

2.2. Çözüm Prosedürü

Γ ile sınırlandırılmış Ω problem bölgesi kabul edilsin. Sınır Γ_u ve Γ_t olarak iki parçaya bölünsün. Bunlardan Γ_u ifadesi yer değiştirme değerlerinin tanımlandığı sınırı, Γ_t 'de çekme kuvvetinin verildiği sınırı belirtmektedir.

Elastostatik durumlar için alan denklemleri,

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (20)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (21)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (22)$$

gibi tanımlanır. Yer değiştirme (esas) ve yük (doğal) sınır koşulları denklem (26) ve (27)'de verilmiştir.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \Gamma_u \text{ üzerinde tanımlı} \quad (23)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \Gamma_t \text{ üzerinde tanımlı} \quad (24)$$

Daha önce belirtildiği gibi Galerkin prosedürü uygulanıp denge denklemini test fonksiyonu olan v ile çarpılırsa zayıf form elde edilir.

$$\int_{\Omega} v_i (\sigma_{ij,j} n_j + b_i) d\Omega = 0 \quad (25)$$

$v_i \sigma_{ij}$ için zincir kuralı uygulanırsa;

$$\int_{\Omega} (v_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega = 0 \quad (26)$$

elde edilir. Birinci terime Gauss teoremi uygulanırsa aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\int_{\Gamma} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega = 0 \quad (27)$$

Denklem (27)'de ki sınır koşulları denklem (30)'a uygulanırsa aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\int_{\Gamma} v_i \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega = 0 \quad (28)$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ eşit olduğundan denklem aşağıdaki şekilde sadeleştirilir.

$$\sigma_{ij} v_{i,j} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) = \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \quad (29)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \int_{\Gamma} v_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega \quad (30)$$

Denklem vektör notasyonları şeklinde yazılıp son hal olarak aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(u) \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(v) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (31)$$

Lagrange çarpanları metodu kullanılarak esas sınır koşulları uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(u) \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(v) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma \quad (32)$$

Lagrange çarpan ifadesi yaklaşık olarak;

$$\boldsymbol{\lambda} = N_I(s) \lambda_I \quad (33)$$

gibi gösterilebilir. Denklemlerin en son hali olarak;

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (34)$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T C B_J d\Omega \quad (35)$$

$$G_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \Phi_I N_K D S d\Gamma \quad (36)$$

$$f_I = \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I b d\Omega \quad (37)$$

$$q_K = - \int_{\Gamma_u} N_K S \bar{u} d\Gamma \quad (38)$$

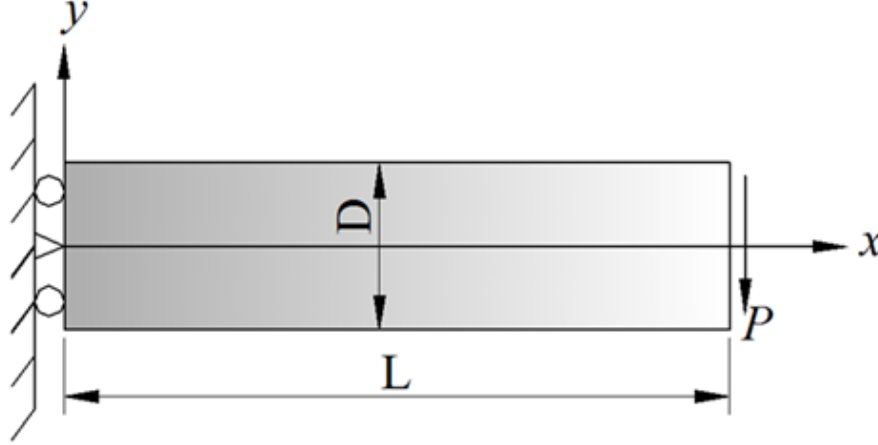
burada S , 2 boyutlu diyagonal matristir. Katılık matrisindeki

$$B_I = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (39)$$

şeklinde olur.

3. İKİ BOYUTLU ANKASTRE KİRİŞİN EBG VE SEY İLE ANALİZİ

Bu bölümde analitik, EBG ağırsız metotların karşılaştırılmalı analizi iki boyutlu elastik ankastre kirişe (Şekil 1) uygulanacaktır. Bu kiriş uygulamalarda sık olarak kullanıldığından dolayı hem nümerik, hem de analitik olarak incelenmiştir.



Şekil 1. P yüküne maruz iki boyutlu ankastre kiriş

Analizde Şekil 1’de görüldüğü gibi $x=L$ noktasında P yüküne maruz bırakılan elastik bir kiriş kullanılmıştır. Problemdaki değişkenlerin değerleri Çizelge 1’gibi seçilmiştir.

Çizelge 1. Ankastre kirişteki değişkenlerin değerleri

Değişken	Değer
Yük (P)	1000 N
Young modülü (E)	30 MPa
Poisson oranı (ν)	0.3
Kiriş boyu (L)	48 m
Kiriş yüksekliği (D)	12 m
Kiriş kalınlığı (b)	1 m

3.1. Timoshenko Kiriş İçin Analitik Çözüm Denklemleri

Yer değiştirmeler için analitik çözümler literatürden yararlanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir [11].

$$u_x(x, y) = \frac{-Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu)(y^2 - \frac{D^2}{4}) \right] \quad (40)$$

$$u_y(x, y) = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu)\frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (41)$$

Esas sınır koşulları uygulanıp (40) ve (41) denklemlerin çözülmesiyle $x = 0$ noktasındaki x ve y yönündeki yer değiştirmeler

$$u_x|_{x=0} = \frac{-P(2 + \nu)}{6EI} \left[y^2 - \frac{D^2}{4} \right] \quad (42)$$

$$u_y|_{x=0} = \frac{P\nu L}{2EI} y^2 \quad (43)$$

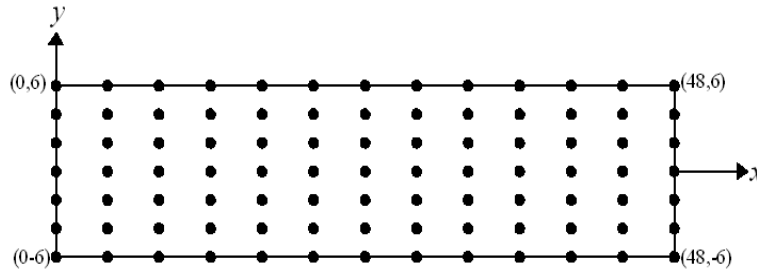
olarak bulunur. İki boyutlu Timoshenko kiriş problemi EBG yöntemi kullanarak aşağıdaki basamaklara göre analiz edilmiştir.

1. Problem bölge geometrisinin tanımlanması.
2. Problem bölgesinin gösterimi için alan düğümlerinin oluşturulması.
3. Nümerik integrasyon için arka plandaki hücrelerin tanımlanması.
4. Gauss nokta sayısı, bölgenin etkinlik boyutu, EBG şekil parametrelerinin, penalti katsayısı parametrelerinin tanımlanması.
5. Denklem takımlarının oluşturulması.
6. Esas sınır koşullarının tanımlanması.
7. Denklem takımının çözümü.

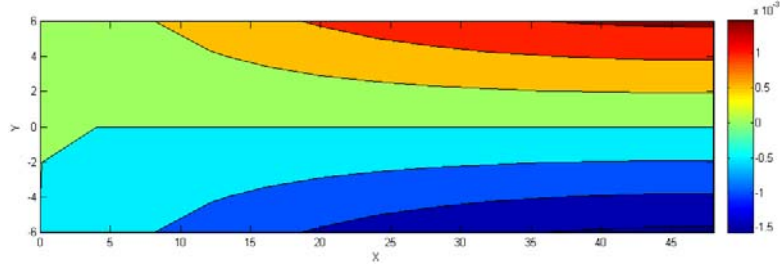
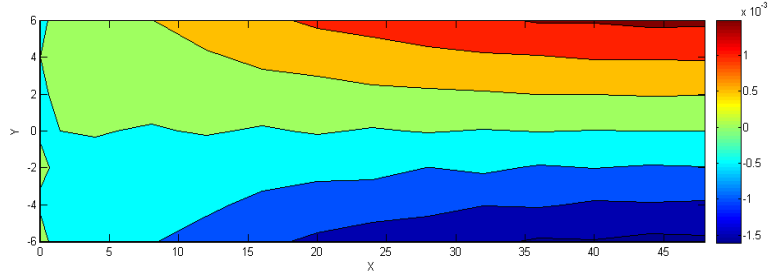
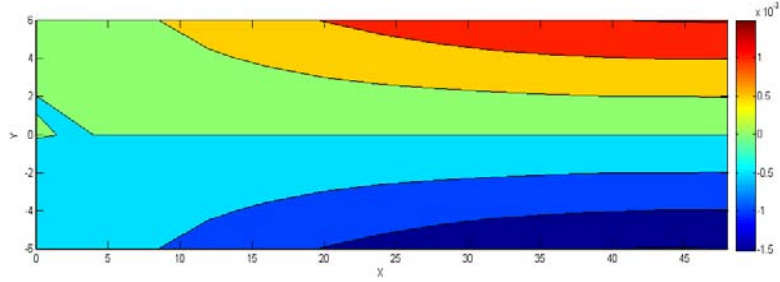
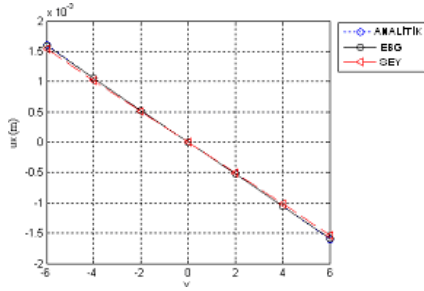
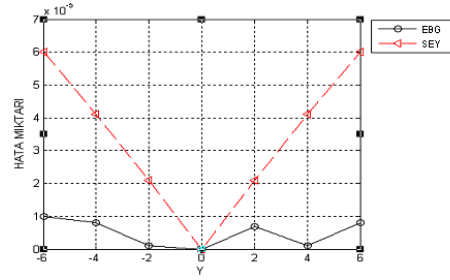
Timoshenko kirişi için problem bölgesinin geometrisini oluşturmak basittir. Karmaşık yapıdaki problemler için, ağırsız yöntemlerle çözümde daha karmaşık programlamanın yapılması gerekmektedir. Problem, EBG yöntemiyle Matlab paket programı ve 91 (7×13) adet düğüm noktası kullanılarak çözülmüştür. Nümerik integrasyon için toplam 40 (10×4) düzenli dikdörtgen arka plan hücreleri kullanılmıştır. Arka plan hücreleri alan düğümlerinden bağımsızdır. Şekil 2'de kirişin modellenmesi ve koordinatları gösterilmektedir. Şekil 2'de EBG, SEY ve analitik çözümde kullanılan düğüm noktaları verilmiştir. Bu çalışmada çözülen problem için esas sınır şartları olarak, denklem (42) ve (43) kullanılarak sol uç için uygulanmıştır.

Sonlu elemanlar metodunda 91, 220 ve 527 düğüm sayısı kullanılıp çözüm için en iyi sonuç veren izoparametrik kuadratik eleman tip seçilmiştir. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde ise 91 düğüm sayısı, 40 hücre, 640 Gauss kuadratik nokta kullanılmıştır.

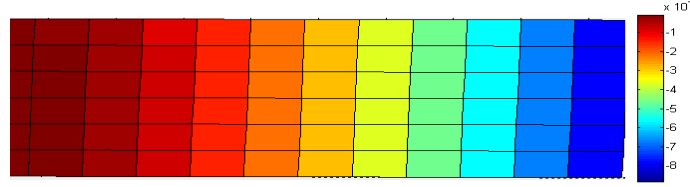
Şekil 3, 4 ve 5'te analitik, EBG ve SEY çözümlerinde elde edilen u_x yer değiştirme dağılımları verilmiştir.



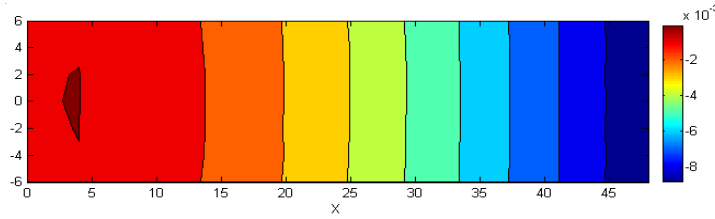
Şekil 2. EBG, SEY ve analitik çözümde kullanılan düğüm noktaları

Şekil 3. Analitik çözümden elde edilen u_x dağılımıŞekil 4. EBG metodundan elde edilen u_x dağılımıŞekil 5. SEY kullanılarak elde edilen u_x dağılımıŞekil 6. Analitik, EBG ve SEY'den elde edilen, serbest uçta y eksenini boyunca u_x yer değiştirmeleriŞekil 7. EBG ve SEY'den elde edilen, serbest uçta y eksenini boyunca u_x 'deki hatalar

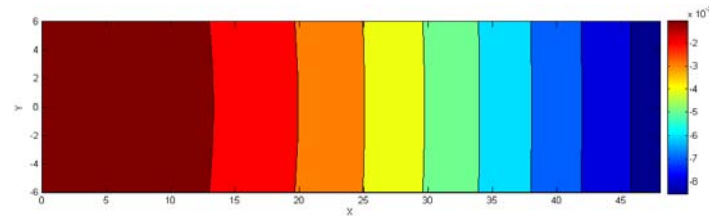
Şekil 6 ve 7’de kirişin yük uygulanan serbest ucundaki eksenel yöndeki yer değiştirme u_x değerleri analitik, EBG ve SEY ile hesaplanmış ve birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda analitik çözümlerle EBG ve SEY arasındaki farklar hata miktarı olarak tanımlanmış ve ayrı bir şekilde verilmiştir. Şekil 6’da görüldüğü gibi EBG yönteminde hata oranlarının daha az olduğu belirlenmiştir. Şekil 8-10’da ise kirişin y yönündeki deformasyon dağılımı verilmiştir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi üç farklı çözüm yönteminden elde edilen dağılımlar benzerdir.



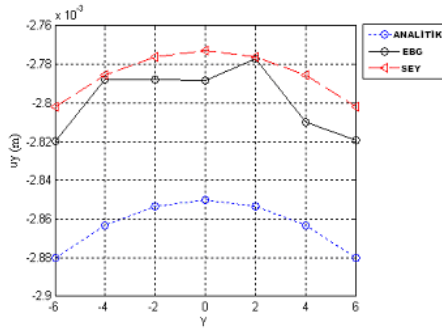
Şekil 7. Analitik metottan elde edilen u_y yer değiştirme dağılımı



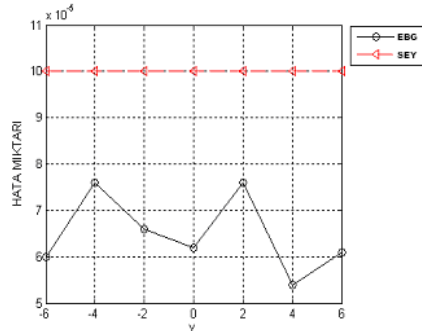
Şekil 8. EBG metodundan elde edilen u_y yer değiştirme dağılımı



Şekil 9. 72 elemanlı SEY’den elde edilen u_y yer değiştirme dağılımı

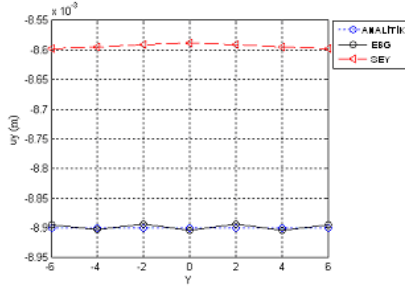


Şekil 11. Analitik, EBG ve SEY’den elde edilen, kirişin ortasında y eksenı boyunca u_y yer değiştirmeleri

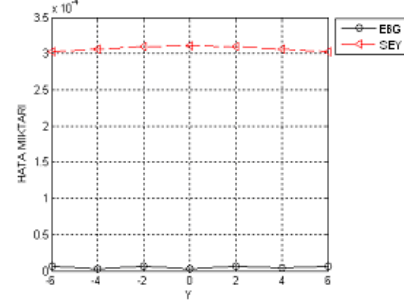


Şekil 10. EBG ve SEY’den elde edilen, kirişin ortasında y eksenı boyunca u_y ’deki hataları

Şekil 11 ve 12’de kirişin uzunlaşmasına eksenin orta noktasındaki eksene dik yöndeki yer değiştirme u_y değerleri analitik, EBG ve SEY ile hesaplanmış ve birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda analitik çözümlerle EBG ve SEY arasındaki farklar hata miktarı olarak tanımlanmış ve ayrı bir şekilde verilmiştir. Şekil 12’de görüldüğü gibi EBG yönteminde hata oranlarının daha az olduğu belirlenmiştir.

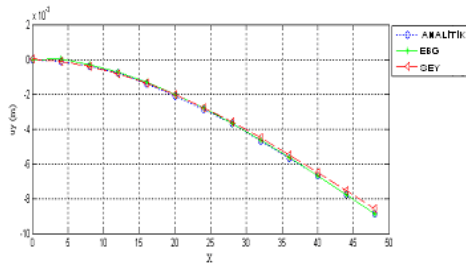


Şekil 12. Analitik, EBG ve SEY’den elde edilen, serbest uçta y eksenini boyunca u_y yer değiştirmeleri

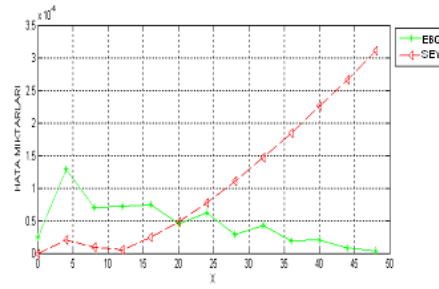


Şekil 14. EBG ve SEY’den elde edilen, serbest uçta y eksenini boyunca u_y ‘deki hatalar

Şekil 13 ve 14’de kirişin serbest ucunda y eksenini boyunca y yönündeki yer değiştirme u_y değerleri analitik, EBG ve SEY ile hesaplanmış ve birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda analitik çözümlerle EBG ve SEY arasındaki farklar hata miktarı olarak tanımlanmış ve ayrı bir şekilde verilmiştir. Şekil 13 ve 14’de görüldüğü gibi EBG yönteminin analitik çözümlerle daha uyumlu olduğu ve EBG yönteminde hata oranlarının daha az olduğu görülmektedir.

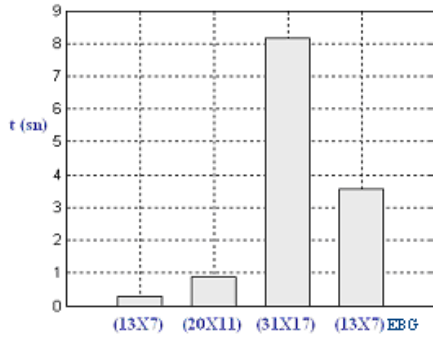


Şekil 15. Analitik, EBG ve SEY’den elde edilen, $y=0$ ’da x eksenini boyunca u_y yer değiştirmeleri

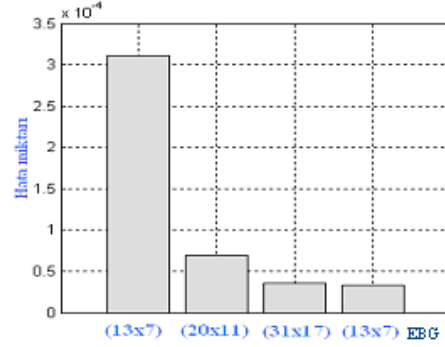


Şekil 13. EBG ve SEY’den elde edilen, $y=0$ ’da x eksenini boyunca u_y ‘deki hatalar

Diğer bir karşılaştırma kirişin tarafsız eksenini boyunca diğey yer değiştirme u_y değerleri ile yapılmış ve Şekil 15 ve 16’da bu karşılaştırmalar ve hata miktarları verilmiştir. Şekil 16’da görüldüğü gibi EBG yönteminin ankastre mesnetten uzaklařtıķça analitik çözümlerle daha uyumlu olduğu, mesnete yakın noktalarda SEY daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.



Şekil 14. EBG yöntemindeki çözüm sürelerinin (CPU time) düğüm sayısına bağlı olarak SEY yöntemiyle karşılaştırılması



Şekil 15. EBG yöntemindeki hata miktarlarının düğüm sayısına bağlı olarak SEY yöntemiyle karşılaştırılması

Nümerik metotlarda kullanılan yöntemin uygunluğunu ve verimliliğini artıran en önemli etkenlerden biri problem çözüm süresidir. Sonlu elemanlar yöntemindeki çözümün hassasiyetini etkileyen en önemli parametre analizde kullanılan eleman sayısıdır. Eleman sayısı ile sonuç çözüm doğruluğu arasında genel olarak doğru orantı ilişkisi olduğu söylenebilir. Bu anlamda bu çalışmada incelenen problem için sonlu elemanlar yönteminde farklı düğüm sayısı seçilerek gerek sonuç esnekliği ve gerekse çözüm süresi bakımından eleman bağımsız Galerkin metoduyla karşılaştırılmıştır.

Çözüm süresini etkileyen parametrelerden diğerleri ise analizde kullanılan programlama dili, işletim sistemi özelliği ve en önemlisi de bilgisayar donanımı ile alakalıdır. Analiz süresince Core 2 duo intel inside 2.GHZ CPU, 2 GB RAM hafıza, Windows Vista işletim sistemi ve Matlab 7.0 programı kullanılmıştır.

Çizelge 2’de EBG ve SEY’de problem çözüm süresinin düğüm sayısına bağlı olarak değişimi verilmiştir. EBG metodu ile SEY’de aynı düğüm sayısı kullanıldığında, problem çözüm süresi EBG yönteminde SEY’e göre daha uzun olduğu görülmüştür. Bunun en önemli nedenlerinden biri EBG yönteminde şekil fonksiyonlarının hesaplanmasında geçen zaman ve Gauss kuadratik noktalarını oluşturulduktan sonra yer değiştirmelerin hesabında geçen zamanın uzun olmasıdır. SEY’de eleman sayısı arttıkça doğal olarak çözüm süresinin arttığı gözlenmiştir. Ancak iki yöntem arasındaki hata oranlarının karşılaştırması sonucunda ise (Şekil 16), aynı hata miktarlarının ancak yüksek düğüm sayılı SEY ile elde edildiği ve bu durumda SEY süresinin EBG yönteminden daha uzun olduğu belirlenmiştir.

Çizelge 2. Serbest uçtaki orta nokta ($x=48, y=6$) için SEY ve EBG yöntemlerinde düğüm sayısına bağlı çözüm süresi, u_y değeri ve hata miktarları ($u_y = -0.0089$ analitik çözüm)

Yöntem	Düğüm sayısı	Çözüm süresi (s)	u_y (m)	Hata miktarı
EBG	91 (13x7)	3.5724	-0.0089033	0.000033
SEY	91 (13x7)	0.2802	-0.0085885	0.000311
SEY	220 (20x11)	0.8892	-0.0088313	0.000069
SEY	527 (31x17)	8.1433	-0.0089354	0.000035

Sonlu elemanlar yönteminde eleman sayısı artırıldıkça çözüm hassasiyetin arttığı görülmüştür. Hassasiyet açısından EBG yöntemine yaklaştığı gözlenmiştir. Buna karşılık olarak çözüm süresi artmıştır. Aynı zaman sürecinde yani SEY’de 220 düğüm sayısı, EBG yönteminde ise 91 yaklaşık olarak düğüm sayısı kullanıldığında EBG, çözülen problem için sonlu elemanlar yönteminden daha hassas sonuçlar vermiştir, ve aynı hata miktarında yani SEY’de 527 düğüm noktası sayısı, EBG yönteminde ise 91 düğüm sayısı kullanıldığında EBG yönteminde problem için sonlu elemanlar yönteminden daha kısa sürede çözülmüştür (Çizelge 2).

4. YORUMLAR

Bu çalışmada eleman bağımsız Galerkin yöntemi iki boyutlu Timoshenko kirişine uygulanıp elde edilen sonuçlarla sonlu elemanlar yöntemi ve analitik çözümle yer değiştirme değerleri, çözüm süreleri ve düğüm sayısı gibi değişkenler bakımından karşılaştırılmıştır. Gerek SEY’de, gerekse EBG yönteminde düğüm sayısının artırılması çözüm hassasiyetini olumlu yönde etkilemiştir. Buna bağlı olarak çözüm süresi de artmıştır. Bu çalışmada incelenen problem için SEY ile EBG yönteminde eşit sayıda düğüm sayısı kullanıldığında EBG metodu u_y değerleri açısından SEY’ye göre daha hassas sonuçlar verdiği ancak daha uzun işlem süresine sahip olduğu görülmüştür. İki yöntemin analitik çözümle karşılaştırılması sonucu elde edilen hata oranlarının aynı değerde olması için SEY’de daha fazla düğüm noktasının (elemanın) kullanılması gerektiği ve bunun da SEY’nin çözüm sürelerini artırdığı ve EBG yönteminden daha fazla olmasına yol açtığı belirlenmiştir. Bu nedenle EBG yönteminin karmaşık problemler dışında basit bir mekanik problemin çözümünde bile SEY’den daha verimli olduğu belirlenmiştir.

REFERENCES / KAYNAKLAR

- [1] Pekedis M., “Ağsız Yöntemlerle Yapısal Analiz”, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, İzmir, 2008.
- [2] Monaghan J.J., “An introduction to SPH”. *Comput. Phys. Com.*, 48(1), 89–96, 1988.
- [3] Liu W.K., Chen Y., Chang C.T., Belytschko T., “Advances in multiple kernel particle methods”, *Comput. Mech.*, 18(2):73–111, 1996.
- [4] Liu W.K., Jun S, Zhang Y.F., ”Reproducing kernel particle methods”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 20(6), 1081–1106, 1995.
- [5] Duarte C.A.M., Oden J.T., “H-p clouds—An h-p meshless method”, *Numer Methods Partial Differen Equat.*, 12(7),673–705, 1996.
- [6] Atluri S.N., Zhu T., “A new meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics”, *Comput. Mech.*, 22(2):117–127, 1998.
- [7] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L., “Element-free Galerkin method”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37:229–256, 1994.
- [8] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., Krysl P., “Meshless methods: an overview and recent developments”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 139(1):3–47, 1996.
- [9] Nayroles B., Touzot G., Villon P., "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, 10, 307-318, 1992.
- [10] Dolbow J., Belytschko T., “Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods”, *Computational Mechanics*, 23, 219-230, 1999.
- [11] Timoshenko S.P., Goodier J.N., “Theory of Elasticity”, Third Ed. McGraw-Hill, New York, USA, 1970.