Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi

Sigma
Vol./Cilt 26
Issue/Sayı 3

Araştırma Makalesi / Research Article

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MATRIX COEFFICIENT WHICH HAS SPECTRAL PARAMETER IN BOUNDARY CONDITION

Fatma AYDIN AKGÜN*, Mehmet BAYRAMOĞLU

Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metaluji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Esenler-İSTANBUL

Geliş/Received: 11.03.2008 Kabul/Accepted: 11.08.2008

ABSTRACT

In this paper following boundary value problem is considered.

$$-y'' + Q(x)y = \lambda R(x)y \quad , \quad a < x < b$$
$$y'(x) = 0$$
$$\beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) = \lambda\alpha \; y(b)$$

Here $Q(x), R(x)$ is $n \times n$ self-adjoint matrix functions, $R(x)$ is positive matrix , α , β_1, β_2 are constants satisfy some conditions and λ is a spectral parameter.The spectrum of considered boundary value problem is investigated and the expansion formulas according to eigenvalues are obtained.
Keywords: Self-adjoint operator, spectral parameter, eigenvalue, eigenfunction.

SINIR KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN MATRİS KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİ ÜZERİNE

ÖZET

Bu çalışmada aşağıdaki sınır değer problemi ele alınmıştır.

$$-y'' + Q(x)y = \lambda R(x)y \quad , \quad a < x < b$$
$$y'(x) = 0$$
$$\beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) = \lambda\alpha \; y(b)$$

Burada $Q(x), R(x)$ $n \times n$ boyutlu kendine eş matrisler, $R(x)$ pozitif matris α , β_1, β_2 bazı koşulları sağlayan sabit sayılar, λ spektral parametredir. Ele alınan sınır değer probleminin spektrumu incelenmiş, özfonksiyonlara göre açılım formülleri elde edilmiştir.
Anahtar Sözcükler: Kendine-eş operatör, spektral parametre, özdeğer, özfonksiyon.

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: e-mail/e-ileti: fakgun@yildiz.edu.tr, tel: (212) 383 46 16

1. GİRİŞ

Fizikte sınır koşulunda spektral parametre bulunan diferansiyel denklemler için sınır değer problemine sık sık rastlanır[3].
Poisson bir mekanik problemini sınır koşulunda spektral parametre bulunan

$$-y'' = \lambda y \ , \ a < x < b$$

$$y(0) = 0 \ , \ y'(b) = \lambda y(b)$$

şeklinde sınır değer probleminin incelenmesine indirgemiştir. Bu çalışmadan günümüze kadar sınır koşulunda spektral parametre bulunan birçok sınır değer problemi incelenmiştir. Bu çalışmalara örnek olarak sırasıyla [1],[7], [8],[9],[10],[18],[20],[22] çalışmaları gösterilebilir.

Katsayıları nxn boyutlu matrisler olmak üzere göz önüne alınan bu çalışma, ek koşullarla , [7] çalışmasının devamıdır.
Bu çalışmada

$$l(y) = -y'' + Q(x)y = \lambda R(x)y \qquad , \qquad a < x < b \tag{1.1}$$

$$y'(a) = 0 \tag{1.2}$$

$$U_\alpha(y) = \alpha \ y(b)$$

$$U_\beta(y) = \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b)$$

olmak üzere

$$-U_\beta(y) = \lambda(U_\alpha)y \tag{1.3}$$

sınır değer probleminin spektrumu ve özfonksiyonlara göre açılım formülleri incelenecektir.Burada

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & . & . & q_{1n}(x) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ q_{n1}(x) & . & . & q_{nn}(x) \end{pmatrix}, R(x) = \begin{pmatrix} r_{11}(x) & . & . & r_{1n}(x) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ r_{n1}(x) & . & . & r_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

elemanları reel değerli sürekli fonksiyon olan kendine-eş $n \times n$ boyutlu matrisler, $R(x)$ pozitif matris ve $\alpha \ , \beta_1, \beta_2$ ise $\alpha\beta_1 < 0$ ve $\alpha\beta_2 = 1$ koşullarını sağlayan reel sayılardır. λ kompleks parametredir. $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ . \\ . \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in L_2[a,b]$ elemanları $[a,b]$ de tanımlı kompleks değerli fonksiyon olan n bileşenli vektör fonksiyonudur. $Q(x)$ 'in sürekliliği basitlik için kabul edilmiştir. Genelde $Q(x)$ 'in elemanlarının ölçülebilirliği ve $\int_a^b \|Q(x)\| dx < \infty$ olması yeterlidir.

$L_{2,R}[a,b]$ ile her bileşeni ölçülebilir, kompleks değerli ve

$$\int_a^b (R(x)y(x), y(x))dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ vektörlerinin kümesini gösterilmektedir.

Bu kümede iki vektörün toplamı

$$y(x) + z(x) = (y_1(x) + z_1(x), y_2(x) + z_2(x), ..., y_n(x) + z_n(x))$$

ile bir vektörün skalerle çarpımı

$$cy(x) = (cy_1(x), cy_2(x), ..., cy_n(x))$$

şeklinde tanımlanırsa $L_{2,R}[a,b]$ kümesi lineer uzay oluşturur.

Eğer iki vektörün iç çarpımı

$$(y,z) = \int_a^b (R(x)y(x), z(x))dx$$

şeklinde tanımlanırsa $L_{2,R}[a,b]$ uzayı aşağıdaki norma göre tam iç-çarpım uzayı yani Hilbert uzayı oluşturur.

$$\|y\| = \sqrt{\int_a^b (R(x)y(x), y(x))dx}$$

Tanımlanan iç-çarpım ve normla oluşturulan Hilbert uzayı da $L_{2,R}[a,b]$ sembolüyle gösterilecektir. $n = 1$ iken , (a,b) de tanımlı fonksiyonlar için , $L_{2,R}[a,b]$ bilinen Hilbert uzayıdır.

Öncelikle (1.1) ifadesiyle oluşturulan maksimal ve minimal operatörlerin tanımları verilecektir.

D_1, (a,b) açık aralığının her kapalı alt aralığında kendisi türevinin her bileşeni mutlak sürekli olan $y(x)$ vektör fonksiyonlarının kümesi olsun. Kolayca görülür ki $R^{-1}(x)l(y)$, D_1 e ait her $y(x)$ vektör fonksiyonu için tanımlıdır. D_1 , $L_{2,R}[a,b]$ de her yerde yoğun olan bir lineer manifolddur. $y(x)$ elemanlarının(vektör fonksiyonlarının) kümesi

$$y(x) \in D_1 \cap L_{2,R}[a,b] \quad ve \quad l(y) \in L_{2,R}[a,b] \text{ iken}$$

D ile gösterilsin. Tanım kümesi D olan L operatörü $\forall y(x) \in D$ ve iken

$$Ly = R^{-1}(x)l(y)$$

şeklinde tanımlansın.

$L : L_{2,R}[a,b] \to L_{2,R}[a,b]$ operatörüne $L_{2,R}[a,b]$ de $R^{-1}(x)l(y)$ ile oluşturulan **maksimal operatör** denir [12]. Açıktır ki L bir lineer operatördür.

(a,b) aralığında sonlu desteye sahip ve D'ye ait fonksiyonların kümesi $D_0^{'}$ ile gösterilsin. $D_0^{'}, L_{2,R}[a,b]$de hemen her yerde yoğundur[12].Tanım kümesi $D_0^{'}$ olan $L_0^{'}$ operatörü her $y \in D_0^{'}$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$L_0^{'} y = R^{-1}(x)l(y) \ ,$$

Kolayca görülür ki $L_0^{'}$ bir simetrik operatördür. $L_0^{'}$'ın kapanışı L_0 ile gösterilirse L_0 operatörü $L_{2,R}[a,b]$ de $R^{-1}(x)l(y)$ ile oluşturulan **minimal (kapalı) operatördür**.

$y(x) \in D(L)$ için $y(a), y^{'}(a), y(b), y^{'}(b)$ vardır ve L_0'ın tanım kümesi şu şekildedir:

$$D(L_0) = \{y(x) \in D(L) : y(a) = y^{'}(a) = y(b) = y^{'}(b) = 0\}$$

$L_0^{*} = L$ olduğu ve L_0'ın defekt indisinin $(2n,2n)$ olduğu bilinmektedir[12].

$L_{2,R}[a,b]$ de T operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$D(T) = \{y(x) \in L_{2,R}[a,b], y(x)\ \ ve\ \ y^{'}(x), [a,b]$'de mutlak sürekli $R(x)^{-1}l(y) \in L_{2,R}[a,b]$ $y^{'}(a) = 0 \ , \ U_{\alpha}(y) = 0\}$ ve $\forall y(x) \in D(T)$ için $Ty = R^{-1}(x)l(y)$ olsun.

Böyle tanımlanmış $T : L_{2,R}[a,b] \to L_{2,R}[a,b]$ operatörü kendine eş operatördür[12]. Tanımlanan T operatörü daha sonra kullanılacaktır.

(1.1),(1.2),(1.3) probleminde görüldüğü gibi λ özdeğeri (kompleks spektral parametre) (1.3) koşulunda bulunmaktadır. Buna göre lineer operatörler teorisinin yöntemleri doğrudan uygulanamamaktadır. Fakat (1.1)-(1.3) problemi daha geniş uzayda göz önüne alınırsa, problem olağan sınır değer problemine indirgenebilir.

2. (1.1)-(1.3) PROBLEMİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI

(1.1)-(1.3) probleminin özfonksiyonu denildiğinde ; $[a,b]$ aralığında birinci türevi ve $y^{'}(x)$ fonksiyonu mutlak sürekli , (1.1) denklemini ve (1.2)-(1.3) koşullarını sağlayan, özdeş olarak sıfır olmayan $\forall y(x)$ fonksiyonu anlaşılır ve burada λ sayısı da $y(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen özdeğerdir.

λ_1, λ_2 ,(1.1)-(1.3) probleminin kompleks özdeğerleri (kompleks), $y_1(x), y_2(x)$ ise sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar (kompleks) olsun.

$$-y_1'' + Q(x)y_1 = \lambda_1 R(x) y_1 \qquad , \qquad a < x < b \tag{2.1}$$

$$-U_\beta(y_1) = \lambda_1 U_\alpha(y_1) \tag{2.2}$$

$$y_1'(a) = 0 \tag{2.3}$$

$$-y_2'' + Q(x)y_2 = \lambda_2 R(x) y_2 \qquad , \qquad a < x < b \tag{2.4}$$

$$-U_\beta(y_2) = \lambda_2 U_\alpha(y_2) \tag{2.5}$$

$$y_2'(a) = 0 \tag{2.6}$$

(2.1) in her iki yanı sağdan $\overline{y_2}$ ile ,(2.4)' ün ise her iki yanı soldan $\overline{y_1}$ ile skaler çarpılırsa(C^n uzayı anlamında)

$$-\left(y_1'', \overline{y_2}\right) + \left(Q(x)y_1, \overline{y_2}\right) = \lambda_1\left(R(x)y_1, \overline{y_2}\right)$$
$$-\left(y_2'', \overline{y_1}\right) + \left(Q(x)y_2, \overline{y_1}\right) = \lambda_2\left(R(x)y_2, \overline{y_1}\right)$$

elde edilir. Bu iki ifade bir birinden çıkarılıp eşitliğin her iki yanının integrali alınırsa ($R(x)$ kendine eş matris olduğundan);

$$-\left(y_1', \overline{y_2}\right)\Big|_a^b + \left(y_2' \overline{y_1}\right)\Big|_a^b = \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2)\left(R(x)y_1, \overline{y_2}\right)dx \tag{2.7}$$

olur.(1.2) koşulundan dolayı $y_1'(a) = 0 \;\; ve \;\; y_2'(a) = 0$ dır dolayısıyla (2.7)'den

$$-\left(y_1'(b), \overline{y_2}(b)\right) + \left(y_2'(b), \overline{y_1}(b)\right) = \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2)\left(\mathrm{R}(\mathrm{x})y_1, \overline{y_2}\right)dx$$ bulunur.

(1.3) sınır koşulundan;

$$y(b) = \frac{U_\alpha(y)}{\alpha} \quad \text{iken} \quad U_\beta(y) = \beta_1 \frac{U_\alpha(y)}{\alpha} - \beta_2 y'(b) \tag{2.8}$$

bulunur. Buradan (2.8)'in her iki yanı α ile çarpılırsa ;

$\alpha U_\beta(y) = \beta_1 U_\alpha(y) - \alpha\, \beta_2 y'(b)$ olur. Böylece;

$$y'(b) = \beta_1 U_\alpha(y) - \alpha U_\beta(y) \tag{2.9}$$

bulunur. (2.8) ve (2.9) da bulunan ifadeler (2.7) de kullanılırsa

$$-\left[\left(\left(\beta_1 U_\alpha(y_1)-\alpha U_\beta(y_1)\right),\frac{U_\alpha(\overline{y_2})}{\alpha}\right)-\left(\left(\beta_1 U_\alpha(y_2)-\alpha U_\beta(y_2)\right),\frac{U_\alpha(\overline{y_1})}{\alpha}\right)\right]$$

$$=\int_a^b(\lambda_1-\lambda_2)(R(x)y_1,\overline{y_2})dx,$$

$$-\left[\frac{\beta_1}{\alpha}\left(U_\alpha(y_1),U_\alpha(\overline{y_2})\right)-\left(U_\beta(y_1),U_\alpha(\overline{y_2})\right)-\frac{\beta_1}{\alpha}\left(U_\alpha(y_2),U_\alpha(\overline{y_1})\right)+\left(U_\beta(y_2),U_\alpha(\overline{y_1})\right)\right]$$

$$=\left(U_\beta(y_1),U_\alpha(\overline{y_2})\right)-\left(U_\beta(y_2),U_\alpha(\overline{y_1})\right)$$

$$=-\lambda_1\left(U_\alpha(y_1),U_\alpha(\overline{y_2})\right)+\lambda_2\left(U_\alpha(y_2),U_\alpha(\overline{y_1})\right)=\int_a^b(\lambda_1-\lambda_2)(R(x)y_1,\overline{y_2})dx$$

bulunur. Buradan

$$(\lambda_1-\lambda_2)\left[\int_a^b(R(x)y_1,\overline{y_2})dx+\left(U_\alpha(y_1),U_\alpha(\overline{y_2})\right)\right]=0 \tag{2.10}$$

elde edilir. (1.1) denkleminin katsayıları, elemanları reel değerli sürekli fonksiyon olan matrisler olduğundan $\overline{y_1(x)}$ fonksiyonuda $\overline{\lambda_1}$ özdeğerine karşılık gelen özvektör olacaktır.

Buna göre (2.9)da y_2 yerine $\overline{y_1(x)}$ konulursa

$$\left(\lambda_1-\overline{\lambda_1}\right)\left[\int_a^b\left(R(x)y_1,y_1\right)dx+\left|U_\alpha(y_1)\right|^2\right]=0$$

olur. Buradan $y_1(x)\neq 0$, $R(x)$ pozitif matris olduğundan

$$im\lambda_1=0 \tag{2.11}$$

bulunur. Dolayısıyla λ özdeğeri reeldir. Böylece λ_1 keyfi özdeğer olduğundan (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin reel sayılardan oluştuğu sonucuna varılır. Yine ele alınan problemin katsayıları ve özdeğerleri reel olduğundan dolayı özfonksiyonları da reel değerli alınabilir. Buna göre bundan sonra (1.1)-(1.3) problemin özfonksiyonlarının $\Re^n$ değerli oldukları varsayılacaktır.

3. (1.1)-(1.3) PROBLEMİN UYGUN BİR HİLBERT UZAYINDA BİR KENDİNE-EŞ OPERATÖRE İNDİRGEYEREK SPEKTRAL ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Önce $[a,b]$ aralığında aşağıdaki şekilde bir "μ ölçümü" tanımlanır;

$$\mu(m)=\begin{cases}\int_m R(x)dx & m\subset[a,b)\\ 1 & m=\{b\}\end{cases}$$,burada 1 $n\times n$ boyutlu matrisdir. (3.1)

μ 'nün tanımından görüldüğü gibi $m \subset [a,b)$ kümesinin ölçümü m 'nin Lebesque ölçümüne eşittir. $L_{2,R}([a,b],\mu)$ ile $[a,b]$ de tanımlı μ ölçülebilir ve

$$\int_a^b \|f(x)\|^2 d\mu < \infty,$$

koşulunu sağlayan her $x \in [a,b]$ için C^n değerli fonksiyonlar kümesi gösterilsin.
Burada iç çarpım

$$(f,g) = \int_a^b (R(x)f(x), g(x))dx + (f(b), g(b))$$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(r_{ij}(x) f_j(x) \overline{g_i}(x) \right) \right) dx + (f(b), g(b))$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu şekilde tanımlanan iç çarpım "μ ölçümüne" göre tanımlanmış iç-çarpım olarak adlandırılacaktır. Bu küme de vektörlerin toplamı ve sayı ile çarpımı işlemlerine göre, bir lineer uzaydır. $L_{2,R}([a,b],\mu)$ ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur[12].

Uyarı: μ ölçümünün tanımından görüldüğü gibi $u, v \in C^n$ iken $L_{2,R}([a,b],\mu)$ uzayı

$$L_{2,R}[a,b] \oplus C^n$$

uzayı ile çakışır.

Burada $L_{2,R}[a,b]$ daha önce tanımlanan ve n bileşenli fonksiyonlardan oluşan uzay ,C^n ise n boyutlu kompleks vektör uzayıdır. Bir başka deyişle $\forall f(x) \in L_{2,R}([a,b],\mu)$ vektörü

$$f(x) = \{f(x), U_\alpha(f)\} = \left\{ \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ . \\ . \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1(b) \\ f_2(b) \\ . \\ . \\ f_n(b) \end{pmatrix} \right\}$$ şeklinde yazılabilir.

Sağ taraftaki $f(x)$ $[a,b)$ aralığının hemen her noktasında (Lebesque ölçümüne göre) tanımlıdır. $L_{2,R}([a,b],\mu)$ uzayı H harfi ile gösterilsin.(1.1)-(1.3) sınır değer problemini olağan operatör denkleme indirgemek için aşağıdaki şekilde bir A operatörü tanımlanabilir;

$D(A) = \{y(x) \in H, y(x)$ *ve* $y'(x)$, (a,b) *açık aralığında mutlak sürekli ve*
$y'(a) = 0$, $\alpha y(b) = U_\alpha(y)\}$ ve $y(x) \in D(A)$ iken

$$A\begin{pmatrix} y(x) \\ \alpha y(b) \end{pmatrix} = \begin{cases} R^{-1}(x) l(y) & x \in [a,b) \\ -U_\beta(y) & x = \{b\} \end{cases} \tag{3.2}$$

olsun.

A operatörünün tanımından görüldüğü gibi (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğer ve özvektörleri A'nın özdeğer ve özvektörleridir. Böylece (1.1)-(1.3) probleminin incelenmesi $A : H \to H$ operatörünün spektral özelliklerinin incelenmesine indirgemiş olur. Bu nedenle (1.1)-(1.3) problemi yerine A operatörü incelenecektir. A simetrik, alttan sınırlı, üstten sınırsız ve esaslı(essential) kendine eş operatördür.

A Simetrik Operatördür;

$$Af = \begin{pmatrix} R^{-1}(x)\left(-f'' + Q(x) f\right) \\ -U_\beta(f) \end{pmatrix}$$

Burada;

$$Q(x) f = \begin{bmatrix} q_{11}(x) & . & . & q_{1n}(x) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ q_{n1}(x) & . & . & q_{nn}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ . \\ . \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

ve $U_\beta(f) = \beta_1 \begin{bmatrix} f_1(b) \\ . \\ . \\ f_n(b) \end{bmatrix} - \beta_2 \begin{bmatrix} f_1'(b) \\ . \\ . \\ f_n'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_\beta(f_1) \\ . \\ . \\ U_\beta(f_n) \end{bmatrix} = U_\beta(f)$.

$$(Af, g) = \int_a^b \left(R(x) R^{-1}(x)\left(-f'' + Q(x) f\right), g\right) dx - \left(U_\beta(f), U_\alpha(g)\right)$$

$$= \int_a^b \left(-f'', g\right) dx + \int_a^b \left(Q(x) f, g\right) dx - \left(U_\beta(f), U_\alpha(g)\right)$$

($(f,g)' = (f',g) + (f,g')$)

$$= \left(-f', g\right)\Big|_a^b + \int_a^b \left(f', g'\right) dx + \int_a^b \left(Q(x) f, g\right) dx - \left(U_\beta(f), U_\alpha(g)\right)$$

($f'(a)$ =0 ve $Q(x)$ kendine eş matris)

$$= \left(-f^{'}(b), g(b)\right) + \int_a^b \left(f^{'}, g^{'}\right)dx + \int_a^b \left(f, Q(x)g\right)dx - \left(U_\beta(f), U_\alpha(g)\right)$$

$$= \left(-f^{'}(b), g(b)\right) + \left(f, g^{'}\right)\Big|_a^b - \int_a^b \left(f, g^{''}\right)dx + \int_a^b \left(f, Q(x)g\right)dx - \left(U_\beta(f), U_\alpha(g)\right)$$

sınır koşulu (1.2) den;

$$= \left(-f^{'}(b), g(b)\right) + \left(f(b), g^{'}(b)\right) - \int_a^b \left(f, g^{''}\right)dx + \int_a^b \left(f, Q(x)g\right)dx - \left(U_\beta(f), U_\alpha(g)\right)$$

bulunur.(2.9) dan

$$= \left(-\left[\beta_1 U_\alpha(f) - \alpha U_\beta(f)\right], \frac{U_\alpha(g)}{\alpha}\right) + \left(\frac{U_\alpha(f)}{\alpha}, \left[\beta_1 U_\alpha(g) - \alpha U_\beta(g)\right]\right)$$

$$+ \int_a^b \left(f, \left(-g^{''} + Q(x)\,g\right)\right)dx - \left(U_\beta(f), U_\alpha(g)\right)$$

$$= -\frac{\beta_1}{\alpha}\left(U_\alpha(f), U_\alpha(g)\right) + \left(U_\beta(f), U_\alpha(g)\right) + \frac{\beta_1}{\alpha}\left(U_\alpha(f), U_\alpha(g)\right)$$

$$-\left(U_\alpha(f), U_\beta(g)\right) + \int_a^b \left(f(x), \left(-g^{''} + Q(x)\,g\right)\right)dx - \left(U_\beta(f), U_\alpha(g)\right) \quad .$$

$$= \int_a^b \left(f(x), Ag(x)\right)d\mu = \left(f, Ag\right)$$

bulunur. Böylece *A operatörünün simetrik operatör* olduğu gösterilmiştir.
$\forall\, y \in D(A)$ için $\left(Ay, y\right) \geq -\gamma(y, y)$ olacak şekilde sabit γ sayısının varlığı gösterilebilir.

$l(y)$ diferansiyel ifadesinin katsayıları ve sınır koşulundaki sayılar reel olduğundan dolayı $A : H \to H$ operatörü reeldir[6].Buna gore L 'nin alttan sınırlı olduğunu göstermek için ,bu operatörün $D(L)$ ye ait olan bileşenleri reel değerli fonksiyonlar olan vektörleri için gösterilmesi yeterlidir.

A operatörü alttan sınırlıdır;

$$Ay = \begin{pmatrix} R^{-1}(x)\left(-y(x)^{''} + Q(x)y(x)\right) \\ -U_\beta(y) \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y(x) \\ U_\alpha(y) \end{pmatrix} \text{ iken}$$

$$(Ay,y)=\left(\begin{pmatrix} R^{-1}(x)\left(-y(x)''+Q(x)y(x)\right) \\ -U_{\beta}(y)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(x) \\ U_{\alpha}(y)\end{pmatrix}\right)$$

$$=\int_a^b \left(R(x)R^{-1}(x)\left(-y(x)''+Q(x)y(x)\right),y(x)\right)dx-\left(U_{\beta}(y),U_{\alpha}(y)\right)$$

$$=-\left(y(x)',y(x)\right)\Big|_a^b+\int_a^b \left(y(x)',y(x)'\right)dx+\int_a^b \left(Q(x)y(x),y(x)\right)dx$$

$$-\left(\left[\beta_1 y(b)-\beta_2 y'(b)\right],\alpha_1 y(b)\right)$$

(1.2) koşulundan ;

$$=-\left(y'(b),y(b)\right)+\int_a^b \left(y(x)',y(x)'\right)dx+\int_a^b \left(Q(x)y(x),y(x)\right)dx$$

$$-\alpha\beta_1\left(y(b),y(b)\right)+\alpha\beta_2\left(y'(b),y(b)\right)$$

olur. $\alpha\beta_1<0$, $\alpha\beta_2=1$ olduğundan dolayı yukarıdaki ifadeden

$$=\int_a^b \left\|y(x)'\right\|^2 dx+\int_a^b \left(Q(x)y(x),y(x)\right)dx-\alpha\beta_1\left\|y(b)\right\|^2\geq\int_a^b \left(Q(x)y(x),y(x)\right)dx$$

$$\geq-\gamma\left\|y\right\|^2_{L_2[a,b]}\geq-\gamma\left\|y\right\|^2_H$$

bulunur. Burada $\gamma=\max\limits_{a\prec x\leq b}\left\|Q(x)\right\|$. Böylece $(Ay,y)\geq-\gamma(y,y)$ bulunmuş dolayısıyla A operatörünün alttan $-\gamma$ sayısı ile sınırlı olduğu gösterilmiştir.

$(A-\lambda I)D(A)$ **her yerde yoğundur;**

λ, A'nın alt sınırı $-\gamma$'dan küçük bir reel sayı olsun. Bu durumda $(A-\lambda I)D(A)$ 'nın kapanışının $\overline{(A-\lambda I)D(A)}=H$ olduğunu gösterilebilir.

$u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ v_n\end{pmatrix}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}\in H$ sabit tutulmuş herhangi bir eleman olsun.

$\begin{pmatrix} f(x) \\ U_{\alpha}(f)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(x) \\ \alpha f(b)\end{pmatrix}\in D(A)$ keyfi eleman iken,

$$\left((A-\lambda I)\begin{pmatrix} f(x) \\ \alpha f(b)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix} \left(R^{-1}(x)T-\lambda\right)f \\ -\left(\beta_1 f(b)-\beta_2 f^{'}(b)\right)-\lambda\alpha f(b)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}\right)$$

$$=\int_a^b \left(R(x)\left(R^{-1}(x)T-\lambda\right)f,u\right)dx+\left(\left(-\left(\beta_1 f(b)-\beta_2 f^{'}(b)\right)-\lambda\alpha f(b)\right),v\right)$$
$$=\int_a^b \left(\left(L-\lambda T(x)\right)f,u\right)dx+\left(-\left(\beta_1 f(b)-\beta_2 f^{'}(b)+\lambda\alpha f(b)\right),v\right)=0 \tag{3.3}$$

eşitliğinin sağlandığını varsayılırsa keyfi $f\in D(T)$ iken (3.3) de

$$\left(-\left(\beta_1 f(b)-\beta_2 f^{'}(b)+\lambda\alpha f(b)\right),v\right)=0 \tag{3.4}$$

koşulu sağlandığında

$$\int_a^b \left(\left(L-\lambda T(x)\right)f,\bar{u}\right)dx=0 \tag{3.5}$$

dır. $\left(L-\lambda R(x)\right)D(T)=L_{2,R}\left[a,b\right]$ olduğundan (3.5) e göre

$$u(x)=0$$

dır.Bu (3.3) te göz önüne alınırsa

$$\left(-\left(\beta_1 f(b)-\beta_2 f^{'}(b)+\lambda\alpha f(b)\right),v\right)=0$$

dır. $\begin{pmatrix} f(x) \\ \alpha f(b)\end{pmatrix}\in D(A)$ keyfi eleman olduğundan $\beta_1 f(b)-\beta_2 f^{'}(b)+\lambda\alpha f(b)\neq 0$ olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonu vardır. Bundan dolayı (3.4) den $v=0$ bulunur. Buradan $\overline{(A-\lambda I)D(A)}=H$ olduğu görülür.

$\lambda<-\gamma$ iken $\left(A-\lambda I\right)^{-1}$ simetrik operatörünün sınırlı, H da her yerde yoğun kümede tanımlı olduğunu dikkate alınırsa bilinen *Rellich Teoremine* [5] göre $\left(A-\lambda I\right)^{-1}$ operatörünün kapanışı kendine eş operatördür. Bu ise A' nın kapanışının kendine eş olduğunu kanıtlar. Yani **A esaslı (essential) kendine eş operatördür**.

4. ÖZFONKSİYONLARA GÖRE AÇILIM

Önce A'nın kendine eş operatör olduğunu gösterilmelidir. Bunun için [14] çalışmasında olduğu gibi aşağıdaki şekilde A_1 operatörünü tanımlanacaktır.

$D(A_1)=\left\{y\in D(T)\,|\,y^{'}(b-0)=0\right\}$ *iken* her $\forall y\in D(A_1)$ için

$$A_1 y=l(y)$$

ve

$L_{2,R}[a,b]$ uzayı H 'nın $y(b)=0$ koşulunu sağlayan elemanlarının oluşturduğu alt uzay ile özdeşleştirilebilir ve buna göre

$$L_{2,R}[a,b]=\{y\in H\,;\;y(b)=0\}$$

olduğu varsayılacaktır. $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve $y'(a)=0$, $U_{\beta}(y)=0$ koşullarıyla oluşturulan

$$T:L_{2,R}[a,b]\rightarrow L_{2,R}[a,b]$$

operatörü kendine eş operatördür[14]. T operatörünün spektrumu sadece aşağıdaki forma sahip özdeğerlerden oluştuğu bilinmektedir.

$$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots\leq\ldots\leq\lambda_n\leq\ldots\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty\,.$$

Bu ise T 'nin esaslı(essential) spektrumunun yani $\sigma_e(T)$'nin boş küme olduğunu gösterir.

$A\ ve\ T$ operatörleri A_1 operatörünün sonlu boyutlu genişlemeleridir. Yani $D(A)$ ve $D(T)$ kümeleri $D(A_1)$ modülüne göre sonlu boyutludurlar. Başka bir deyişle M_1, M_2 sonlu boyutlu alt uzaylar olmak üzere $D(A)$ ve $D(T)$ sırasıyla

$$\begin{matrix} D(A)=D(A_1)+M_1 \\ D(T)=D(A_1)+M_2 \end{matrix}\qquad D(A_1)\cap M_1=D(T)\cap M_2=\phi\ (boş\ \ küme)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda aşağıdaki bilinen teorem ifade edilebilir.

TEOREM

Kapalı operatörün her sonlu boyutlu genişletilmesi de kapalı operatördür.

İfade edilen teoreme göre A kapalı operatördür. A'nın kapanışının kendine eş olduğunu gösterilmişti. Böylece A esaslı(essential) kendine-eştir. Weyl Teoremine [16] göre kapalı operatörün esas spektrumu ile bu operatörün her sonlu boyutlu genişletilmesinin esas spektrumu çakışır.

Buna göre

$$\sigma_e(A)=\sigma_e(T)$$

dir. $\sigma_e(T)=\phi$ olduğundan $\sigma_e(A)=\phi$ olur.

Esas spektrumu boş küme olan her kendine eş operatörün spektrumu saf ayrıktır[15].Buna göre alttan sınırlı A operatörünün spektrumu, yığılma noktası sadece artı sonsuz olan, özdeğerlerden ibarettir. Bu özdeğerleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\mu_1\leq\mu_2\leq\ldots\leq\ldots\leq\mu_n\leq\ldots\quad ,\ \lim_{n\to\infty}\mu_n=\infty$$

Bu aynı zamanda A'nın üstten sınırsız olduğunu gösterir. $\mu_i \ (i = 1,2,...,n..)$

özdeğerlerine karşılık gelen n bileşenli ortanormal özvektörleri $\forall\ \varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{i1}(x) \\ \varphi_{i2}(x) \\ . \\ \varphi_{in}(x) \end{pmatrix}$

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ... \qquad (4.1)$$

ile gösterilir. Bilinen teoreme göre ([15],[11]) (4.1) vektörler sistemi H uzayının bir bazıdır. Bununla biz aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 1:

$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x \\ . \\ f_n(x \end{pmatrix} \in H$ keyfi bir vektör olsun. Bu taktirde

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \qquad (4.2)$$

eşitliği doğrudur. Burada

$$a_k = \int_a^b (R(x) f(x), \varphi_k(x)) dx \qquad , \ k = 1,2,...$$

formülleri ile tanımlanır. (3.2) eşitliğindeki seri $f(x)$' e $\mu(x)$ ölçümüne göre ortakuadratik anlamda yakınsar.

$$\lim_{N \to \infty} \int_a^b \left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\|^2 d\mu(x) = 0$$

Bilinenlere dayanarak ([2],[17],[7]) Teorem 1'in özel hali ifade edilebilir.

Teorem 2:

$u \in L^2[a,b]$ herhangi bir vektör, $\tilde{\varphi}_k$ ise φ_k 'nın $[a,b)$'ye kısıtlaması olsun. Bu taktirde

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tilde{\varphi}_k \qquad (4.3)$$

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{\varphi}_k(x), \sum_{i=1}^{n} U_\alpha(\tilde{\varphi}_{ki}) \right) \qquad (4.4)$$

eşitlikleri sağlanır.(4.3) deki b_k katsayıları;

$$b_k = \int_a^b \left(R(x)u(x), \varphi_k(x)\right)dx \quad , \quad k = 1,2...$$

formülleri ile tanımlanır.(4.3) serisi $u(x)'e$ $L_{2,R}[a,b]$ anlamında yakınsaktır. Ek olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} U_\alpha(\tilde{\varphi}_{ki})\right)^2 = n \tag{4.5}$$

<u>İspat:</u>
Teoremi ispatlamak için

$$u = \begin{cases} u(x) & a \le x < b \\ U_\alpha(u) & x = \{b\} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \int d\mu = \begin{cases} \int R(x)dx & a \le x < b \\ 1 & x = \{b\} \end{cases} \quad \text{iken}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \int_a^b \left(u(x), \varphi_k(x)\right) d\mu(x)$ serisinin $u(x)$ 'e , $\mu(x)$ ölçümüne göre ortakuadratik yakınsaması, yani:

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^{N} \tilde{\varphi}_k \int_a^b \left(u(x), \varphi_k(x)\right) d\mu(x) \right\|^2 d\mu(x) = 0$$

kullanılacaktır. Buradan

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^{N} \tilde{\varphi}_k \int_a^b \left(u(x), \varphi_k(x)\right) d\mu(x) \right\|^2 d\mu(x) \right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\{ \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^{N} \tilde{\varphi}_k \int_a^b \left(R(x)u(x), \varphi_k(x)\right)dx + \sum_{k=1}^{N} \tilde{\varphi}_k \left(U_\alpha(u), U_\alpha(\varphi_k)\right) \right\|^2 dx + \right.$$
$$\left. \left\| U_\alpha(u) - \sum_{k=1}^{N} U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b \left(u(x), \varphi_k(x)\right) d\mu(x) \right\|^2 \right\} = 0 \tag{4.6}$$

olur. $u = \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ alınırsa $U_\alpha(u) = 0$ olur. Bu durumda (4.6) eşitliğinden

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ \int_a^b \left\| u(x) - \sum_{k=1}^{N} \tilde{\varphi}_k \int_a^b \left(R(x)u(x), \varphi_k(x)\right)dx \right\|^2 dx + \left\| \sum_{k=1}^{N} U_\alpha(\tilde{\varphi}_k) \int_a^b \left(u(x), \varphi_k(x)\right) d\mu(x) \right\|^2 \right\} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{N\to\infty}\left\| u(x)-\sum_{k=1}^{N}\tilde{\varphi}_k\int_a^b \big(R(x)u(x),\varphi_k(x)\big)dx\right\|^2 = 0 \qquad \to$$

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_k\int_a^b \big(R(x)u(x),\varphi_k(x)\big)dx \text{ ve } 0=\sum_{k=1}^{\infty}U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)\int_a^b \big(u(x),\varphi_k(x)\big)d(x)$$

bulunmuş olur . Böylece (4.3) gösterilmiştir.

(4.6) da $u(x)=\begin{pmatrix} u(x) \\ U_\alpha(u)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ alınırsa (4.6) eşitliği aşağıdaki gibidir.

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\int_a^b \left\|\sum_{k=1}^{N}\tilde{\varphi}_k\big(1,U_\alpha(\varphi_k)\big)\right\|^2 dx+\left\|1-\sum_{k=1}^{N}U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)\big(1,U_\alpha(\varphi_k)\big)\right\|^2\right\}=0 \tag{4.7}$$

Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_k(x)\big(1,U_\alpha(\varphi_k)\big)=0 \text{ veya } \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_k(x)\left(\sum_{i=1}^{n}U_\alpha(\varphi_{ki})\right)=0 \qquad \text{(yani (4.4) eşitliği)}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty}U_\alpha(\tilde{\varphi}_k)\big(1,U_\alpha(\varphi_k)\big)=1 \quad \text{(yani (4.5) eşitliği)}$$

bulunur. (Burada 1:n boyutlu birim vektördür)

Özel olarak 1 birim vektörünü $1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\.\\0\end{pmatrix}$ şeklinde alınırsa bu durumda

(4.4) eşitliği

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_k\big(U_\alpha(\varphi_{k1})\big)=0$$

ve (4.5) eşitliği

$$\sum_{k=1}^{\infty}U_\alpha(\tilde{\varphi}_{k1})\left(\sum_{j=1}^{n}U_\alpha(\varphi_{kj})\right)=n$$

şeklinde yazılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Poisson S.D., Memoire sur la Maniere d'exprimer hes Fonctions par des Series de Quantites Periodiques, estur I'usage de cette , Transformation dans La Resolution de Differens Problems, Journal de I'Ecole Polytechnique, Cah. 18(1820), pp.417-489.

[2] Friedman B., Principles and Techniques of Applied Mathematics, John Wiley & Sons, London, 1956.

[3] Tychonov A.N. and Samarskii I. I., Equations of Mathematical Physics,New York,1956.

[4] Glazman I.M., Direct Methods of Qualitative Spactrum Analysis of Singular Differential Operators, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965

[5] Hellwig G., Differential Operators of Mathematical Physics, London, 1967.

[6] Naimark M.A.,Linear Differential Operators ,George G.Harrap&Company,LTD, London, 1968.

[7] Walter J.,Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition, Math.Z.133, Page: 301-312, 1973.

[8] Russakovskii E.M., Operator Treatment of Boundary Value Problems with Spectral Parameters Entering via Polynomials in the Boundary Conditions, Functional Analysis Applications 9 (1975), 358-359.

[9] Fulton C.T., Two-Point Boundary Value Problems with Eigenparameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. R. Soc. Edinburg A77 (1977), 293-308.

[10] Fulton C.T., Singular Eigenvalue Problems with Eigenvalue-parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. R. Soc. Edinburg A87 (1980), 1-34.

[11] Kato T.,Perturbation Theory for Linear Operators, Springer Verlag, Berlin, New-York, 1980.

[12] Weidmann J., (1980), Linear Operators in Hilbert Spaces, Graduate Texts in Mathematics, Vol.68, Springer Verlag, New York.

[13] Shkalikov A.A., Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with Parameter in the Boundary Conditions, J. Soviet Math. 33 (1986) 1311-1342.

[14] Weidmann J., (1987), Spectral Theory of Ordinary Differential Operator, Springer Verlag, London.

[15] Akhiezer N.I.,Glazman I.M., Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications, INC, New York, (1987).

[16] Birman M.S. and Solonyak M.Z., Spectral Theory of Self Adjoint Operators, DRedidel Published co Drdrecht, 1987.

[17] Hochstad H., Integral Equations, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[18] Binding P.A., Browne P.J., Seddighi K., Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions, Proc. Edinburgh Math. Soc. 37 (1993),57-72.

[19] Russakovskii E.M., (1996), The Matrix Sturm-Liouville Problem with Spectral Parameter in the Boundary Conditions, Algebric and Operator Aspectors, Trans. Moscow. Math. Soc., 159-184.

[20] Amara J.B., Fourth Order Spectral Problem with Eigenvalue in the Boundary Conditions, Functional Analysis and its Applications, 2004.

[21] Binding P.A., Browne P.J and Watson B.A., Equivalence of Inverse Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationally Dependent on the Eigenparameter, J. Math. Analysis Applic. 291(2004), 246-261.

[22] Binding P.A., Browne P.J and Watson B.A., Sturm-Liouville Problems with Reducible Boundary Conditions, Proceedings of the Edinburg Mathematical Society, (2006) 49, 593-608.