Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi

Sigma
2006/4

Derleme Makalesi / Review Paper

SOME POPULAR NORMALITY TESTS FOR UNIVARIATE DISTRIBUTIONS

Mehmet GENCELİ*

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş/Received: 27.04.2006 Kabul/Accepted: 28.11.2006

ABSTRACT

The normal distribution has long been focal point of much of statistical study. Normality of an underlying data distribution can have an effect on the properties of estimation or inferential procedures. Although so important it was not before the introduction of the Shapiro-Wilk test that normality tests gained attraction. Today we encounter vast literature on these tests.
Consequently, the normality tests such as Pearson's in sqr b_1, b_2 and Fisher's g_1, g_2 along with Shapiro-Wilk's W statistic have been indispensable outputs in statistical packages. In spite of this importance Turkish literature has been lacking from these tests. Therefore the introduction of this topic is aimed at by taking up normality tests such as Pearson and Fisher ones.
Keywords: Normal distribution, inferential statistics, testing univariate normality, test using moments, Pearson and Fisher measures for skewness and kurtosis.
MSC number/numarası: 65C60.

TEK DEĞİŞKENLİ DAĞILIMLARDA NORMALLİK TESTLERİ

ÖZET

Normal dağılıma uygunluk sınamaları özellikle Pearson, Fisher, Geary gibi İngiliz istatistikçileri tarafından 1930'lu yıllarda başlatılmasına rağmen bu konudaki yoğun ilgi ancak Shapiro ve Wilk'in 1965 yılında yayınladığı W testi ile başlamıştır. Bu tarihten sonra yapılan yayınların fazlalığı normallik testleri için momentlere dayanan testler, ampirik dağılımın fonksiyonları ve regresyon-korrelasyon testleri şeklinde bir ayırımı da beraberinde getirmiştir.
Bu konudaki çalışmaların sayıca fazlalığı ve konuya yoğun ilgi belirli normallik testlerinin İstatistik kitaplarında ve paket programlarında yer almalarını da sağlamıştır.
Yabancı yazındaki bu gelişmeye karşın Türkçe yazında konuya ilişkin çalışmalar hemen hemen yoktur. Burada Tümevarım İstatistik için vazgeçilmez bir öğe olan normal dağılım için Fisher ve Pearson basıklık ve çarpıklık ölçüleri tanıtılarak normallik testlerinin ana hatları verilmeye çalışılacaktır.
Anahtar Sözcükler: Normal dağılım, tümevarım istatistik, tek değişkenli dağılımlar için normal dağılıma uygunluk testleri, Pearson karekök b_1, b_2 ve Fisher g_1, g_2 istatistikleri.

1. GİRİŞ

Verilerin değerlendirilmesi için kullanılan çoğu istatistik yöntemler, doğrudan veya dolaylı olarak normal dağılım varsayımına dayanmaktadır. Örneğin hipotez testlerinin ve güven sınırlarının çoğu, en küçük kareler, genelleştirilmiş en küçük kareler, en çok benzerlik yöntemi bu kapsamda sayılabilir. Bu bakımdan verilerin Normal Dağılıma uygunluğunun sınanması çoğu zaman önemli

* e-mail/e-ileti: mehmetgenceli@yahoo.com, tel: (0212) 449 16 73

olmaktadır. [1]

Normal Dağılıma uygunluk sınamaları aslında İstatistikte hayli uzun bir geçmişe sahip bulunmaktadır. Daha 1900'lerin başında Karl Pearson χ^2 Normal Dağılıma Uygunluk Testi'ni ortaya koymuştur. Sonrasında da R.A.Fisher, E.S. Pearson ve R.C.Geary'nin öncülüğünde başlayan çalışmalar [2] ile Normal Dağılıma'a uygunluğun test edilmesinin ilk adımları oluşturulmuştur.

Başlangıçta sınırlı sayıda olan bu yayınlar Örneklemedeki gelişmeye koşut olarak, 1950'lerin başından itibaren yabancı yazında, özellikle de Anglo-Sakson yazınında kitap, monografİ ve makale olarak yerini almaya başlamıştır. [3],

Bu bağlamda, 1965 yılında, geliştirilen Shapiro-Wilk Normallik Testi'nin[4] konuda bir çığır açarak yayınlara ivme kazandırdığı söylenebilir. [5] Diğer taraftan günümüzdeki bilgisayar teknolojilerinin daha kesin Monte Carlo simülasyonlarına olanak sağlaması da normallik testlerine ilişkin yayınlarda bir patlamaya yol açmıştır. [6]

Bu dinamizme karşın Türkçe İstatistik kitaplarında genellikle Normal Dağılım ele alınmaktadır. Değinilen konuda söz konusu çalışmaların bu denli fazlalığı ve çeşitliliği de normallik testleri için momentlere dayanan testler, ampirik dağılım fonksiyonları ve regresyon-korelasyon testleri şeklinde üçlü bir ayırımı da beraberinde getirmiştir.Tüm bu gelişmelerin yansıması olarak da, günümüzde artık yabancı dildeki çoğu istatistik kitaplarında ve bilgisayar paket programlarının tümünde normallik testlerine yer verilmektedir. [7]

Değinilen konuda herhangi bir Türkçe makale ve/veya monografi bulunmaması da Türkçe yazındaki bu çelişkiyi ortaya koymaktadır. Üstelik, Türkiye'de çok yaygın kullanılan SPSS,SAS ve diğer paket programları da normallik test istatistiklerine yer vermekle beraber kullanıcılar bilgi eksikliğinden ötürü bu istatistiklerden yararlanamamaktadırlar. Böyle durumlar bilgi kaybına, daha da önemlisi hatalı yorumlara yol açabilmektedir. Özetlemek gerekirse Türkçe yazın Anglo-Sakson yazının bu konudaki dinamizmine ayak uyduramamış, Türkçe yazında bir boşluk meydana getirmiştir. Bundan ötürü Türkçe yazına henüz girmemiş olan fakat bilgisayar programları içinde çoktan yerini almış alan başlıca normallik testlerinden Pearson ve Fisher'in momentlere dayanan çarpıklık ve basıklık testlerininTürkçe yazına kazandırılması amaçlanmıştır. Kolmogorov-Smirnov ve Khi kare Normal Dağılıma Uygunluk testleri ise inceleme dışı bırakılmıştır. Bunun birinci nedeni bu testlerin daha önce Türkçe yazında yer alması [8] ikinci nedeni ise son derece düşük güçleri dolayısıyla bu testlerin normalliği ölçmede göz önüne alınmaması gereğidir. [9]

2.MOMENTLERE DAYANAN ÇARPIKLIK VE BASIKLIK ÖLÇÜLERİ

2.1. Çarpıklık Ölçüleri

Bu grubun ilk ölçüsü

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\sum (x_i - \mu)^3 / N}{\left[\sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 / N}\right]^3} \tag{1}$$

olarak tanımlanan dağılımın varyansına oranlanarak standart biçime dönüştürülmüş, ortalamaya göre üçüncü moment olan Pearson katsayısıdır. Standart biçime dönüştürülmüş, böylece orijin ve ölçek değişikliklerine duyarlı olmayan momentler ampirik bir dağılımın şekil bakımından teorik bir dağılım ile karşılaştırılmasında önemli bir yere sahiptirler. [10]

Fisher ise ana kütle çarpıklık katsayısı için T.N.Thiele'nin getirdiği κ_i kümülant kavramından hareketle çarpıklık katsayısı γ_1'I

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_3}{\sigma^3} \tag{2}$$

olarak tanımlamaktadır.

Normal dağılım için momentler ile kümülantlar arasındaki bağlantılar

$$\mu_1 = \kappa_1 = 0; \quad \mu_2 = \kappa_2; \quad \mu_3 = \kappa_3; \quad \mu_4 = \kappa_4 + 3\kappa_2^2; \qquad \mu_5 = \kappa_5 + 10\kappa_2\kappa_3 \tag{3}$$

şeklindedir. [11] buna göre de normal dağılım için iki ölçü de 0 ve aynı zamanda $\mu_3 = \kappa_3$ olduğundan simetrik normal dağılımlar için

$\sqrt{\beta_1} = \gamma_1 = 0$ olacaktır.

$\sqrt{\beta_1} > 0$ veya $\gamma_1 > 0$ ana kütle birimlerinin dağılımının sağa, tersi ise sola çarpık olduğunu göstermektedir.

Normallik için gerek Pearson $\sqrt{\beta_1}$, gerekse Fisher γ_1 'in aynı ,0, olması Fisher'in kümülantları tercih nedeninin de sorgulanmasını gerektirmektedir. Bu tercih nedeni olarak aşağıdaki gerekçeler sıralanmaktadır: [12]

a) $\kappa_1 = 0$ dışındaki tüm kümülantların sayısal değerleri hesaplamalar için seçilen orijine bağlı değildir. Halbuki momentlerin hesabında seçilen orijin sonuçları değiştirmektedir. Nitekim 0 ile aritmetik ortalama etrafındaki momentlerin sayısal değerleri birbirinden farklıdır.

b) Birimlerin ölçeğinin herhangi bir c sabiti ile çarpılarak değiştirilmesi için herhangi bir n'inci kümülantın sadece c^n ile çarpılması yeterlidir. Örneğin m. ile ölçülen birimlerin kümülantları ile aynı birimlerin cm. ile ölçülmesi hallerinde hesaplanan kümülantları arasındaki geçiş 100^2, 100^3, 100^4 ve 100^5 ile sağlamaktadır.

$$\kappa_h' = 100^k \kappa_h \qquad h = 2,..,5$$

Pearson ve Fisher çarpıklık katsayıları aynı olmasına rağmen her iki katsayının tahmincileri arasındaki ilişkiler çok karmaşık olduğundan her iki istatistiğin teorik dağılımları ayrı ayrı irdelenecektir. [13]

Pearson yaklaşımı tercih edildiğinde örnek aritmetik ortalamasına göre momentleri simgelemek üzere $\sqrt{\beta_1}$ 'in örnek momentlerine

$$m_r = \sum (x_i - \overline{x})^i / n; \quad i = 2,3; \qquad \pm\sqrt{b_1} = (m_3 / m_2^{3/2}) = (m_3 / \sqrt{m_2}.m_2) \tag{4), (5}$$

tahmincisi kullanılmaktadır.[14]

i=2 için $m_2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x})^2$ 'nin açınımı

$$\frac{1}{n}\sum [x_i - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2] = \frac{1}{n}\left[\frac{\sum x_i^2}{n} - 2\sum x_i\overline{x} + n\overline{x}^2\right] = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2 \tag{6}$$

olacaktır. Aynı şekilde i=3 için de

$$\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{x})^3=\frac{1}{n}\sum\left[x_i^3-3x_i^2\overline{x}+3x_i\overline{x}^2-\overline{x}^3\right]$$

$$\left[\frac{\sum x_i^3}{n}-3\frac{\sum x_i^2}{n^2}\sum x_i+3\frac{\sum x_i}{n}\overline{x}-\overline{x}^3\right]=\frac{\sum x_i^3}{n}-\frac{3\sum x^2\sum x_i}{n^2}+\frac{2\left(\sum x\right)^3}{n^3} \tag{7}$$

sonucuna erişilecektir.

Diğer taraftan (5) formülü için aynı zamanda, sistematik hatalı da olsa , $(n/n-1)$ farkı ihmal edilerek $\pm\sqrt{b_1}=(1/n)\sum[(x_i-\overline{x})/s]^3$ yazılıp $(x_i-\overline{x})/s=t_i$ olduğu anımsanırsa

$$\pm\sqrt{b_1}=(1/n)\sum_{i=1}^{n}t_i^3 \tag{8}$$

formülü de Pearson çarpıklık istatistiğini verecektir.

$\sqrt{b_1}>0$ örnek birimlerini dağılımının sağa, $\sqrt{b_1}<0$ ise sola çarpık olduğunu gösterir. Bununla beraber, sonuçların ana kütle için geçerli olabilmesi için $H_0:\sqrt{\beta_1}=0$ hipotez testinin sonucuna bağlıdır.

Normal dağılan bir ana kütleden çekilen sonlu veya sonsuz örneklerin $\sqrt{b_1}$ 'lerinin birinci momenti, yani $\sqrt{b_1}$ 'lerin beklenen değeri $E(\sqrt{b_1})=0$ 'dır. Birinci moment için sonlu-sonsuz örnek ayırımı farketmemesine rağmen ikinci moment olan varyans için durum farklıdır.

Normal dağılan bir ana kütleden çekilen sonlu örnekler için ikinci moment

$$\mathrm{var}(\sqrt{b_1})=[6(n-2)/(n+1)(n+3)] \tag{9}$$

iken asimptotik normal örnekler için

$$\mathrm{var}(\sqrt{b_1})=(6/n) \text{ olmaktadır.} \tag{10}$$

n>150 için $\sqrt{b_1}$ 'in normal dağıldığı varsayıldığından [14], $H_0=\sqrt{\beta_1}=0$ için $z=\sqrt{b_1}/\sqrt{(6/n)}$ test istatistiği ve normal dağılım çizelgesinden bulunacak $|z_\alpha|$ veya $|z_{\alpha/2}|$ kritik değerler karşılaştırılıp yaklaşık bir sonuç alınabilecektir.

Diğer bir seçenek te $\sqrt{b_1}$ 'in, örnek standart hatası olan $\sigma(\sqrt{b_1})$ 'den küçük olması halidir. Böyle bir durumda teste gerek kalmaksızın simetriye hükmedilebilir.[15]

Büyük örnekler için daha kesin sonuçlar veya n<150 için ise $\sqrt{b_1}$ test istatistik değerleri ile Çizelge 1 değerleri karşılaştırılacaktır.

Çizelge 1. Pearson çarpıklık ölçüsü için kritik değerler

n	$\alpha : \%5$	%2.5	%1	%0.5
20	0.772	0.940	1.150	1.304
25	0.711	0.866	1.059	1.200
30	0.662	0.806	0.986	1.117
35	0.621	0.756	0.923	1.044
40	0.588	0.714	0.871	0.985
45	0.559	0.679	0.826	0.934
50	0.534	0.647	0.788	0.899
60	0.492	0.596	0.724	0.816
70	0.459	0,.556	0.673	0.758
80	0.432	0.522	0.632	0.710
90	0.409	0.494	0.597	0.670
100	0.390	0.470	0.567	0.636
125	0.351	0.422	0.508	0.569
150	0.322	0.387	0.465	0.519
175	0.299	0.359	0.430	0.481
200	0.280	0.336	0.403	0.449
250	0.251	0.301	0.361	0.402
300	0.230	0.275	0.329	0.366
350	0.213	0.255	0.305	0.339
400	0.200	0.239	0.285	0.317
450	0.188	0.225	0.269	0.299
500	0.179	0.214	0.255	0.283

Kaynak : Pearson E.S.-Hartley H.O., “Biometrika Tables for Statisticians”, Charles Griffin, London,1976, Tablo37.

Çizelge değerleri çeşitli n $(20 \leq n \leq 500)$ ve $(1-\alpha)$ ’ya göre, $H_0 : \sqrt{\beta_1} = 0$, $H_1 : \sqrt{\beta_1} > 0$ için tek yönlü hipotez testinde üst hudutları vermektedir. Öte yandan $\sqrt{b_1}$, 0 etrafında simetrik olarak dağıldığından $H_1 : \sqrt{\beta_1} < 0$ için çizelge değerleri bu kez eksi işaretli alınacaktır.

$H_1 : \sqrt{\beta_1} \neq 0$ biçimindeki çift yönlü hipotez testi için ise çizelge değerleri sırasıyla $\alpha = 0.10, 0.05, 0.02$ ve 0.01 ’i vermektedir.

Tek veya çift yönlü çarpıklık testinden hangisinin kullanılacağına da ise dağılımın uzun kuyruğunun yönü belirleyicidir. Uzun kuyruğun yönünün bilindiği varsayımı altında tek yönlü, aksi takdirde çift yönlü hipotez testine başvurulmaktadır. [16]

Çift yönlü hipotez testinde test istatistiği $\pm\sqrt{b_1}$,n ve $(\alpha / 2)$ ’ye göre saptanan kritik değerler $(\sqrt{b_1})_{\alpha/2}$ arasında kaldığı takdirde ana kütlenin çarpıklık bakımından normal dağılıma uygun olduğu şeklindeki H_0 ’ın reddi için bir neden bulunmamaktadır. Buna karşın test istatistiğinin değeri aralık dışına taştığı takdirde H_0 red edilerek ana kütle dağılımının çarpıklığına hükmedilecektir.

Tek yönlü hipotez testlerinde ise n ve α'ya göre düzenlenmiş $-(\sqrt{b_1})_\alpha$ veya $+(\sqrt{b_1})_\alpha$ çizelge değerleri aşıldığı durumlarda H_0 red edilerek sağa veya sola çarpıklığa karar verilecektir.

Pearson çarpıklık testi çizelge 2 verilerine uygulanacaktır.

Çizelge 2. Veri tabanı

i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	**21**	**9**	**23**	**17**	**29**
2	**23**	**10**	**29**	**18**	**26**
3	**33**	**11**	**24**	**19**	**46**
4	**32**	**12**	**32**	**20**	**27**
5	**37**	**13**	**24**	**21**	**36**
6	**40**	**14**	**46**	**22**	**38**
7	**37**	**15**	**32**	**23**	**28**
8	**29**	**16**	**17**	**24**	**33**
				25	**18**
					760

Kaynak : Alptekin E.(Çev), "İstatistik,"Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2002, 248.

$$\bar{x} = 760/25 = 30.4 \quad \sum(x_i - \bar{x})^2 = 1432 m_2 = 1432/25 = 57.28$$

$$\sqrt{m_2} = 7.5683552 \quad \sum(x_i - \bar{x})^3 = 3090 \quad m_3 = 3090/25 = 123.6$$

$$\sqrt{b_1} = (m_3 / m_2^{3/2}) = 123.4/433.51538 = 0.2851$$

$$H_0 : \sqrt{\beta_1} = 0 \qquad H_0 : \sqrt{\beta_1} \neq 0 \qquad \alpha = 0.05$$

$\sqrt{b_1} = 0.2851$ test istatistiği çizelge 1'de $n = 25, \alpha = 0.05$ karşılığı gelen $(-0.711, +0,711)$ aralığı içinde kaldığından H_0 red edilemeyecek, verilerin çarpıklık bakımından normal dağılıma uyduğu kabul edilecektir.

Bu sonuç kaynak kitapta yapılan Ryan-Joiner Normallik testi ile de uyuşmaktadır. [17]

Çarpıklık için Fisher yaklaşımı tercih edildiğinde γ_1'in tahmincisi g_1

$$k_2 = [1/(n-1)][\sum x^2 - (\sum x)^2 / n] \tag{11}$$

$$k_3 = [n/(n-1)(n-2)][\sum x^3 - 3(\sum x \sum x^2)/n + 2(\sum x)^3 / n^2] \tag{12}$$

olmak üzere

$$g_1 = k_3 / k_2^{3/2} \tag{13}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. [18]

(6)ile (11)'den ve (7)ile (12) den görüldüğü gibi k_2 m_2'den , k_3 de m_3'den farklı olup aralarında

$$m_2 = [(n-1)/n].k_2 \tag{14}$$

$$m_3 = [(n-1)(n-2)/n^2].k_3 \tag{15}$$

bağlantıları bulunmaktadır.
(10) ve (11)'den hareketle

$\dfrac{n}{(n-2)}.\dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}.\sqrt{b_1} = g_1$ sonucuna da ulaşılır. Bu bağlamda

$$E\left\{\frac{n}{(n-2)}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\sqrt{b_1}\right\} = \frac{n}{(n-2)}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}E\left(\sqrt{b_1}\right) = E\left(g_1\right) \quad \text{olmaktadır.} \tag{16}$$

Ayrıca $\dfrac{\text{n}}{\text{(n-2)}}\dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \geq 1$ olmasından ötürü de $\sqrt{b_1} \leq g_1$ yazılabilecektir. Her iki tahminci arasındaki fark örnek birim mevcudu n'e bağlı olduğundan bu farkı göstermek üzere aşağıdaki çizelge düzenlemiştir.

Çizelge 3 . $\sqrt{b_1}$ ile g_1 için eşitleme katsayıları

n	Çarpan	n	Çarpan
20	1.0829772	100	1.0152903
25	1.0649955	150	1.01011295
30	1.0534201	200	1.0075726
35	1.0453448	300	1.0050322
40	1.0393904	500	1.0030116
50	1.0311974	1000	1.0015029
60	1.0258259	1500	1.0010013
70	1.0220324	2000	1.0007507
90	1.0170296		

Çizelge 3 sonuçları örnek birim mevcudunun artışına bağlı olarak $\sqrt{b_1}$ ve g_1 sonuçlarının birbirine yaklaştığını göstermektedir. Küçük örnekler için, $n < 40$, tartışmaya açık olmakla beraber, bu durumda g_1 test istatistiği için de çizelge 1 kritik değerlerinin kullanılması önerilir.

Zaten $\sqrt{\beta_1}$ için Pearson çizelgesinin ilk düzenlenmesinde örnek birim mevcudu 50'den başlatılmaktadır.

Öte yandan g_1'in teorik dağılımı da $\sqrt{b_1}$'nin teorik dağılımından farklı olmayıp $\sqrt{b_1}$ için değinilen hususlar burada da geçerlidir. Tek farklılık

$$\text{var}\, g_1 = \frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)} \tag{17}$$

olmasıdır.(16) formülünden görüldüğü gibi, $\sqrt{b_1}$ ile g_1

arasında $k = \dfrac{n}{(n-2)} \dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$ olmak üzere $k.\sqrt{b_1} = g_1$ eşitliği bulunmaktadır. Dolayısıyla da g_1 'in varyansı k^2 kadar artacağından

$$\operatorname{var} g_1 = k^2 \operatorname{var} \sqrt{b_1} = \frac{n^2}{(n-2)^2} \frac{(n-1)}{n} \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)} = \frac{6n(n+1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}$$

elde edilecek, $k > 1$ olduğundan dolayı da $\operatorname{var} \sqrt{b_1} < \operatorname{var} g_1$ yazılabilecektir. Bu sonuç ta $\sqrt{b_1}$ 'in g_1 'e kıyasla daha asimptotik etkin bir tahminci olduğunu ortaya koymaktadır.

Karşılaştırma amacıyla n'in çeşitli büyüklükleri için $\operatorname{var} \sqrt{b_1}$ ve $\operatorname{var} g_1$ değerleri verilmektedir.

Çizelge 4. $\operatorname{var} \sqrt{b_1}$ ve $\operatorname{var} g_1$ değerleri

n	$\operatorname{var} \sqrt{b_1}$	$\operatorname{var} g_1$	$k^2 = n^2(n-1)/(n-2)^2.n$
20	0.22360	0.26225	1.1728395
25	0.1895604	0.2150023	1.1342155
30	0.1822371	0.164228	1.1096939
35	0.1581605	0.1447368	1.0927456
40	0.13714	0.129325	1.080324
50	0.1065482	0.1133	1.0633681
60	0.0952919	0.0905542	1.0523817
70	0.0822258	0.0787188	1.0445582
90	0.0645322	0.0623892	1.0343492
100	0.0565221	0.0582641	1.0203616
150	0.0384365	0.0392191	1.0152025
200	0.0291155	0.0295581	1.0152025
300	0.0198024	0.196046	1.0100896
500	0.011857	0.0119285	1.0060322
1000	0.0059641	0.005982	1.003008
1500	0.004777	0.003992	1.0020036
2000	0.0029955	0.002991	1.001502

$\sqrt{b_1}$ 'in g_1 'de olduğu gibi $\operatorname{var}(\sqrt{b_1})$ ve $\operatorname{var} g_1$ 'de n'in artan değerleri ile her iki varyans birbirlerine çok yakın değerler almaktadır.

Çizelge 2 verileri bu kez Fisher çarpıklık katsayısı γ_1 için kullanılmıştır:

$\sum x = 760 \quad \sum x^2 = 24536 \quad \sum x^3 = 836050$; (11) formülüne göre k_2 :

$k_2 = (1/24)(24536 - (760)^2/25) = (24563 - 23104)/25$;

$k_2 = 59.666667 = s^2$

(12) formülüne göre de k_3 :

$$k_3 = (25/24.23)[83650 - 3(760)(24536)/25 + 2.(760)^3/625$$
$$= 0.0452898[836050 - 2237683.2 + 1404723.2] = 139.94565$$
$$g_1 = k_3 / k_2^{3/2} = 139,94565/(59.66667)^{3/2} = 0.3036419$$

Çizelge 2 verileri için $\sqrt{b_1} = 0.2851$, de g_1 de $g_1 = 0.3036419$ hesaplanmıştır. (16) formülü uygulanacak olursa

$$\frac{25}{23}.\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{25}}(0.2851) = \frac{34.917476}{115} = 0.3036 = g_1$$

veya çizelge 3'deki katsayılar uygulanarak $g_1 = (0.2851)(1.0649995) = 0.3036$ elde edilecektir. var(g_1) ise

$$\operatorname{var} g_1 = \frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)} = \frac{6.25.64}{23.26.28} = \frac{3600}{16744} = 0.215\;; s(g_1) = 0.464$$

hesaplanacaktır. g_1 de $(-0.711, +0.711)$ aralığı içinde kaldığından $\sqrt{b_1}$ için olan sonuç burada da geçerlidir.

2.2. Basıklık Ölçüleri

Momentlere dayanan Pearson basıklık katsayısı β_2 ve Fisher ölçüsü γ_2 de $\sqrt{\beta_1}$ ve γ_1 bağlamında

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^4 / N}{\sum [(x_i - \mu)^2 / N]^2} \qquad (18)$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\sigma^4} \qquad (19)$$

olarak tanımlanmaktadır.[19]

γ_2 aslında $\gamma_2 = \kappa_4 / \kappa_2^2$ olup kümülantlar ile momentler arasındaki bağlantıları sağlayan (3)'den hareketle $\kappa_4 = \mu_4 - 3\kappa_2^2$ ve $\kappa_2 = \mu_2$ yazılıp yerlerine konulduğunda

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \beta_2 - 3$$ şeklindeki (19) formülüne ulaşılacaktır.

Normal dağılım için $\beta_2 = 3$ olup , $\beta_2 > 3$ durumunda dağılım Normal Dağılım'a göre sivri, $\beta_2 < 3$'de de daha basıktır. γ_2 için ise referans 0'dır. γ_2'nin eksi değerleri basıklığa işaret ederken, $\gamma_2 > 0$ sivriliği göstermektedir. β_2 'nin tahmincisi b_2 ise, $\sqrt{b_1}$ de olduğu gibi

$$b_2 = m_4 / m_2^2 \tag{20}$$

olup buna göre de

$$b_2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^4 / n}{[\sum (x-\bar{x})^2 / n]^2} = \frac{n\sum (x-\bar{x})^4}{\left\{\sum (x-\bar{x})^2\right\}^2} \text{ yazılıp, } b_2 = m_4 / \sigma^4 \tag{21}$$

olarak ifade edilebilir. (n/n-1) farkı göz ardı edilip b_2 aynı zamanda $b_2 = m_4 / s^4$ yazılırsa, $\sqrt{b_1}$ için (7) formülüne uygun olarak $t_i = [(x_i - \bar{x}) / s]$ 'den

$$b_2 = (1/n)\sum ((x-\bar{x})/s)^4 = (1/n)\sum t_i^4 \tag{22}$$

formülüne ulaşılacaktır.

Pearson'ın hesapladığı kesin momentlerin sonuçlarına göre, b_2 'nin teorik dağılımı çok yavaş ta olsa asimptotik olarak Normal Dağılım'a yaklaşan, $n \geq 4$ için ortalaması

$$E[b_2] = 3\frac{(n-1)}{(n+1)} \tag{23}$$

varyansı da

$$\text{var}(b_2) = \frac{2+n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)} \tag{24}$$

olan bir dağılımdır.[20] Bununla beraber, $\sqrt{b_1}$ 'in dağılımı ile karşılaştırıldığında, bu uyum çok daha yavaş olup ancak $n > 100$ için Normal Dağılıma yaklaşım söz konusu olmaktadır.[21] Nitekim n=200 gibi büyük sayılabilecek örneklerin dağılımı bile Normal Dağılım'a uymaktan uzaktır. [22]

$n \to \infty$ için ise, b_2, ortalaması 3 ve varyansı 24/n olan bir Normal Dağılıma uymaktadır.

b_2 'nin Normal Dağılım'a bu kadar yavaş uymasının nedeni olarak, $\sqrt{b_1}$ 'in $m_3 > 0$ veya $m_3 < 0$ olan bir istatistikten hesaplanırken, $m_4 > 0$ olmasından ötürü b_2 'nin sadece pozitif değerler alması sayılabilir. Dolayısıyla b_2 'nin teorik dağılımı $\sqrt{b_1}$ gibi simetrik değil, çok çarpık görünümdedir. Bundan ötürü de, Anscombe ve Glynn, b_2 'nin dağılımının normal olduğunu varsayıp ortalama ve standart hatayı hesaplayarak z ile normallik testi yapmanın hatalı olduğuna işaret etmişlerdir. Yazarlara göre böyle bir durum z'in büyük değerlerinde anlamlılığı olduğundan daha fazla, düşük değerlerinde de daha az yapacaktır. [23] Dolayısıyla (23) ile hesaplanan standart hata yardımıyla

$$z = \frac{b_2 - \beta_2}{\sqrt{\operatorname{var} b_2}} = \frac{b_2 - 3}{\sqrt{\operatorname{var} b_2}}$$

dönüşümü ile hesaplanan test istatistiğinin Normal Dağılım Çizelgesin'dan bulunacak $z_{\alpha/2}$ kritik değerleri ile karşılaştırılması doğru değildir.

b_2 'deki bu çarpıklık, b_2 'nin belirli yüzdelere göre dağılımını, başka bir deyişle kritik değerleri veren çizelge 5'da görülmektedir.

Çizelge 5. Pearson basıklık ölçüsü için kritik değerler

n	%0.5	%1	%2.5	%5	%95	%97.5	%99	%99.5
20	1.58	1.64	1.73	1.83	4.18	4.68	5.38	5.91
30	1.73	1.79	1.89	1.98	4.12	4.57	5.20	5.69
40	1.83	1.89	1.99	2.07	4.06	4.46	5.04	5.48
50	1.91	1.95	2.06	2.15	4.00	4.36	5.04	5.48
75	2.05	2.08	2.19	2.27	3.87	4.17	4.59	4.90
100	2.13	2.18	2.27	2.35	3.77	4.03	4.39	4.66
150	2.24	2.29	2.37	2.45	3.65	3.86	4.13	4.34
175	2.28	2.34	2.41	2.48	3.61	3.79	4.04	4.23
200	2.32	2.37	2.44	2.51	3.57	3.75	3.98	4.16
250	-	2.42	-	2.55	3.52	-	3.87	-
300	-	2.46	-	2.59	3.47	-	3.79	-
400	-	2.52	-	2.64	3.41	-	3.67	-
500	-	2.57	-	2.67	3.337	-	3.60	-
600	-	2.60	-	2.70	3.34	-	3.54	-
700	-	2.62	-	2.72	3.331	-	3.50	-
800	-	2.65	-	2.74	3.29	-	3.46	-
900	-	2.66	-	2.75	3.28	-	3.43	-
1000	-	2.68	-	2.76	3.26	-	3.41	-
2000	-	2.77	-	2.83	3.18	-	3.28	-

Kaynak : Pearson E.S.-Hartley H.O., "Biometrika Tables for Statisticians", Charles Griffin, London, 1976.

Kaynağın 1966 baskısında n, örnek birim mevcudu $n \geq 50$'den başlarken, 1976 yılında $n \geq 20$ 'den başlamaktadır. b_2 , β_2 etrafında simetrik olarak dağılmadığından, her iki kuyruk değerleri ayrı ayrı verilmektedir. Sekiz sütundan oluşan çizelgenin ilk dört sütunu alt kuyruk, son dört sütun ise üst kuyruk değerlerini vermektedir. Buna göre $\alpha = 0.5$ alındığı takdirde $\%0.5$ ile $\%99.5$ eşleştirilirken, bu eşleştirme sırasıyla $\%1 - \%99, \%2.5 - \%97.5, \%5 - \%95$ şeklinde yapılacaktır. Aynen çarpıklık testi gibi olan basıklık testinde tek fark iki kritik değer uygulanmasıdır.

Pearson basıklık testi çizelge 2 için uygulanacak olursa:

$$m_2 = 57.28\,;\, m_2^2 = 3280.9984\,;\, \sum (x - \bar{x})^4 = 208764.63\,;$$

$$m_4 = 208764.63 / 25 = 8350.5852$$

$$H_0 : \beta_2 = 3 \quad H_1 : \beta_2 \neq 3 \quad \alpha = 0.05\,; \quad b_2 = 8350.5852 / 3280.9984 = 2.5454354$$

$n = 25$ ve $\alpha = 0.05$ için 1.81 alt sınır, 4.63 üst sınırdır. %5 için diğer α 'lara nazaran daha dar sınırlar elde edilmektedir. Sözgelimi aynı veriler için %1 1.66 ve 5.80'dir. %5 'e göre sınır aralığı (4.63-1.81)=2.82 iken $\alpha = 0.01$ için bu genişlik (5.80-1.66)=4.14 olacaktır.

Gerek %5, gerekse %1 hata payına göre b_2 istatistiği kritik değerler arasında kaldığından $H_0 : \beta_2 = 3$ hipotezinin reddi için bir neden bulunmamaktadır. Basıklık bakımından verilerin basıklığı normal olan, yani sivri veya basık olmayan bir ana kütleden çekildiği söylenecektir.

Öte yandan basıklık için Fisher katsayısı γ_2 tercih edilip g_2 tahmincisinden hareket edilirse

$g_2 = k_4 / k_2^2$ olarak tanımlanmaktadır. [24] (25)

k_2 (11) formülünde verilmiş olup k_4 ise

$$S_2 = \sum X^2 - (\sum X)^2 / n \tag{26}$$

$$S_4 = \sum X^4 - (4/n)\sum X.X^3 + (6/n^2)(\sum X)^2 \sum X^2 - (3/n^3)(\sum X)^4$$

$$k_4 = \frac{n}{(n-1)(n-2)(n-3)}\left[(n+1)S_4 - 3(n-1)/n)S_2^2\right] \tag{27}$$

olacaktır. Ayrıca aritmetik ortalamaya göre örnek momentleri arasındaki ilişki de $m_r = (1/n).s_r$ olduğundan $S_2 = n.m_2$ ve $S_4 = n.m_4$ yazılabilecektir. Böylece (26) formülü yerine

$$k_4 = \frac{(n+1)n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} m_4 - 3.\frac{n^2}{(n-2)(n-3)}.m_2^2 \tag{28}$$

ve (11) için de

$$k_2 = \frac{n}{n-1} m_2 \qquad k_2^2 = \frac{n^2}{(n-1)^2} m_2^2 \tag{29}$$

sonuçlarına erişebilir. Böylece g_2 için bu kez

$$g_2 = \frac{k_4}{k_2^2} = \left\{ \frac{n^2(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} m_4 - 3\frac{n^2}{(n-2)(n-3)} m_2^2 \right\} \frac{(n-1)^2}{n^2} \frac{1}{m_2^2}$$

$$g_2 = \frac{(n+1)(n-1)}{(n-2)(n-3)}.\frac{m_4}{m_2^2} - 3\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \tag{30}$$

$$g_2 = \frac{n(n+1)\sum(x-\overline{x})^4}{(n-1)(n-2)(n-3)s^4}.\frac{m_4}{m_2^2} - 3\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \qquad (31)$$

formülü ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda (29) formülündeki (m_4 / m_2^2)'nın b_2'ye eşit olduğundan hareketle (29) aynı zamanda

$$g_2 = \frac{(n+1)(n-1)}{(n-2)(n-3)}.b_2 - 3\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \qquad (32)$$

olacaktır.

(32) formülüne göre de Fisher'ın sivrilik basıklık istatistiği g_2, Pearson'ın b_2'sinin doğrusal bir fonksiyonudur. [25]Konu ile ilgili olarak Snedecor-Cochran tarafından önerilen

$$g_2 = (m_4 / m_2^2) - 3 = b_2 - 3 \qquad (33)$$

formülünün [27] ancak $n \geq 500$ için yaklaşık geçerli olduğu savı ileri sürülebilir. Bu bakımdan b_2'den g_2'ye geçiş ,için(33) yerine(32)'nin kullanılması daha uygundur. g_2'nin ilk iki momenti olan ortalama ve varyans ise

$$E(g_2) = \frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)} \qquad (34)$$

$$\text{var}(g_2) = \frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)} \qquad (35)$$

olarak verilmektedir. [26]

(22) formülünde $E(b_2)$ için $E(b_2) = 3\frac{(n-1)}{(n+1)}$ verilmiştir. (32) formülü aslında

$E(g_2) = \frac{2n}{(n-2)(n+3)}\frac{3(n-1)}{(n+1)} = \frac{2n}{(n-2)(n-3)}E(b_2)$ olarak da yazılabilir. $E(g_2) > E(b_2)$ veya $E(g_2) < E(b_2)$ olması ise n'e bağlıdır.

$4 \leq n < 6$ için [2n/(n-2)(n-3)]>1 olması nedeniyle $E(g_2) > E(b_2)$'dir. n=7 için $E(g_2) = E(b_2)$ olup n>7 için [2n/(n-2)(n-3)]<1 sonucunda $E(g_2) < E(b_2)$ eşitsizliği söz konusudur.

Çizelge 2 verilerinden $b_2 = 2.5451354$ hesaplanmıştır. Bu kez (26) formülü ile g_2 hesaplanarak $g_2 = -0,276634905$ bulunmuştur. (30) formülü uygulanacak olursa da

$$g_2 = \frac{25.26.(208764.63)}{24.23.22.(3560.11111)} - 3\frac{576}{23.22} = -0.2765$$

aynı sonuca erişilecektir.

Normal Dağılım'a ilişkin basıklık-sivrilik için çizelge 5'in değerleri 1.94 ile 4.63 arasında yer almaktadır. Ancak bu çizelgede referans değeri 3 iken γ_2 için 0'dır. Dolayısıyla da hesaplanan g_2 'nin basıklık testi için g_2 'nin 0 referansına dönüştürülmesi gerekir. Bunun için de (32) formülünden türetilen

$$b_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)(n+1)} g_2 + 3\frac{(n-1)}{(n+1)} \tag{36}$$

kullanılacaktır. Problem için

$$b_2 = \frac{23.22}{24.26}(-0.2765) + 3\frac{24}{25}$$

$$b_2 = 2.7692308 - 0.224097 = 2.5451$$

olarak aynı sonuc elde edebilir. Dolayısıyla da β_2 için yapılan basıklık hipotez testi sonuçları aynı zamanda γ_2 için de geçerlidir.

2.3. Pearson Çarpıklık ve Basıklık Ölçülerinin İrdelenmesi

1960'larda $\sqrt{b_1}$ için getirilen başlıca eleştiri $\sqrt{b_1}$ 'nin teorik dağılımında örnek birim mevcudundaki azalmaya ve/veya dağılımın kuyruk kısmına yaklaşmaya bağlı olarak uygunsuzluğun ortaya çıkmasıydı. [28]
D'Agostino $\sqrt{b_1}$ 'in bu yetersizliğinden hareketle H_0 hipotezinin doğru, $H_0 : \sqrt{\beta_1} = 0$, ve $n \geq 8$ olduğu varsayımı altında

$$Y = \sqrt{b_1}\left\{\frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)}\right\}^{1/2} \tag{37}$$

$$B_2 = \frac{3(n^2+27n-70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}$$

$$W^2 = [2(B_2-1)]^{1/2} - 1;\quad \varsigma_1 = 1/\sqrt{\ln W}\;;\quad \alpha = [2/(W^2-1)]^{1/2}$$

dönüşümleri ile elde edilen

$$z = \varsigma_1 \ln\left\{(Y/\alpha) + [(Y/\alpha)^2 + 1]^{1/2}\right\} \tag{38}$$

değişkeninin yaklaşık $z \sim N(0,1)$ olduğunu göstermiştir. [29] Buna göre $H_0 : \sqrt{\beta_1} = 0$ için (38)'nin standart normal dağılım çizelgesindeki değerler ile karşılaştırılması yeterlidir.
D'Agostino z için

$$Y = \frac{\sqrt{b_1} - \sqrt{\beta_1}}{s_{\sqrt{b_1}}} \tag{39}$$

standart değişkeninden hareket etmekte, simetrik dağılımlarda $\sqrt{\beta_1} = 0$ olduğundan Y için $Y = \sqrt{b_1} / s_{\sqrt{b_1}}$ yazarak ve payda için (9) formülünü kullanarak (39) formülüne ulaşmaktadır.

Bu bağlamda , z, $n \geq 8$ koşuluyla tüm örnek büyüklükleri için geçerli olduğundan $n \geq 20$ için $\sqrt{b_1}$ ve z test istatistiklerinden hangisinin kullanılacağı da tartışılmalıdır. [30]

$n > 150$ için z ve $\sqrt{b_1}$ örtüşmekte, $20 \leq n \leq 150$ için ise aradaki fark 0.0035'i geçmemektedir. [31.] Bu bakımdan, $n \geq 20$ için, hesap kolaylığından ötürü $\sqrt{b_1}$ tercih edilmelidir.

D'Agostino ve Pearson konuyu sonradan tekrar ele alarak bu kez

$$x(\sqrt{b_1}) = \varsigma \sinh^{-1}(\sqrt{b_1} / \lambda) \tag{40}$$

dönüşümünü önermişlerdir. [32]

$x(\sqrt{b_1})$ standart değişkeni için $x(\sqrt{b_1}) \sim N(0,1)$ yazılacağından kritik değerler gene standart normal dağılım çizelgesindan saptanacaktır.

ς ve $(1/\lambda)$ ise normal dağılan bir ana kütleden çekilen örneklerin varyans ve

$$\beta_2(\sqrt{b_1}) = 3 + \frac{36(n-7)(n^2+2n-5)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)} \tag{41}$$

olarak tanımlanan $(\sqrt{b_1})$'nin ortalamaya göre dördüncü momentinin bir fonksiyonudur. $n \to \infty$ için varyans $(6/n)$, $\beta_2(\sqrt{b_1})$ ise 3 olmaktadır.

Hesaplama kolaylığı açısından $8 \leq n \leq 2000$ için ς ve $(1/\lambda)$ değerleri çizelge 6'de verilmektedir.

İlk bakışta farklı bir görünümde olmasına rağmen (38) ve (40) formülleri arasında bir farklılık söz konusu değildir. (38) formülü sadece $\sinh^{-1}(\sqrt{b_1} / \lambda)$ kullanılmaksızın almaşık bir hesaplama şeklidir.Nitekim $\sinh^{-1}(\sqrt{b_1} / \lambda)$ için;

$$\sinh^{-1}(\sqrt{b_1} / \lambda) = \ln[(\sqrt{b_1} / \lambda) + \sqrt{(\sqrt{b_1} / \lambda)^2 + 1}]$$

yazılırsa (38) formülüne benzeyen

$$x(\sqrt{b_1}) = \varsigma \ln[(\sqrt{b_1} / \lambda) + \sqrt{(\sqrt{b_1} / \lambda)^2 + 1}] \tag{42}$$

(42) formülüne ulaşılacaktır. (38) ve (42) aynı sonucu vermektedir. (38) ve (40) formülleri çizelge 2 verilerine uygulanacak olursa:

$$\sqrt{b_1} = 0.2851109; \quad Y = 0.2851109\left\{\frac{26.28}{6.23}\right\}^{1/2} = 0.6548221$$

$$B_2 = \frac{3(625+475-70).26.28}{23.30.32.34} = \frac{2686320}{750720} = 3.5783648$$

$$W^2 = [2(3.5783648-1]^{1/2} - 1 = 1.27018434; \quad W = 1.1273169$$

$$\varsigma_1 = 1/(\ln 1.1273169)^{1/2} = 1/0.3461796 = 2.8886734$$

$$\alpha = [2/(1.2708434-1)]^{1/2} = 2.7174144$$

$$(Y/\alpha) = 0.2409724$$

$$z = 2.8886734.\ln[0.2409724 + (1.0580667)^{1/2}]$$

$$z = 2.8886734.\ln(1.2695966) = (2.8886734)(0.2386991) \quad z = 0.689524$$

sonucu bulunacaktır.

Aynı problem için bu kez (42) formülünü kullanmak için çizelge 6'den, n=25 için $\varsigma = 2.889$ ve $(1/\lambda) = 0.8452$ okunacaktır.

$$x(\sqrt{b_1}) = 2.889\ln[(0.2851109)(0.08452) + 1.028625]$$

$$x(\sqrt{b_1}) = 2.889\ln 1.2696007 = (2.889)(0.2387024)$$

$$x(\sqrt{b_1}) = 0.6896$$

Görüldüğü gibi $z = x(\sqrt{b_1})$ çıkmıştır. Bu bulgulara göre $\alpha = 0.05$ hata düzeyine göre, $z_{\alpha/2} = 1.96$, $H_0 : \sqrt{\beta_1} = 0$ şeklindeki H_0 hipotezinin reddi söz konusu değildir.

$\sqrt{b_1}$ için ortaya konulan sorunlar b_2 içinde geçerli olduğundan, $\sqrt{b_1}$ 'de olduğu gibi, b_2 için de normal dağılıma uygunluk bakımından çeşitli dönüşümler önerilmiştir.

D'Agostino ve Pearson normal dağılan tek değişkenli ana kütleden çekilen örnekler için örnek büyüklükleri n'in apsis, basıklık ölçüleri b_2'nin ordinatta yer aldığı şekil yardımıyla olasılık integrallerini saptamışlardır. [33]

Anscombe ve Glynn ise b_2'nin dağılımının ilk üç momenti olan (23) ve (24) ile standart biçimine dönüştürülmüş üçüncü momenti, $\sqrt{[\beta_1(b_2)]}$ 'nin

$$\sqrt{[\beta_1(b_2)]} = \frac{E[b_2 - E(b_2)]^3}{[\mathrm{var}(b_2)]^{3/2}} = \frac{6(n^2-5n+2)}{(n+7)(n+9)} \cdot \left\{\frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)}\right\}^{1/2}$$

Çizelge 6. $x(\sqrt{b_1})$ dönüşümü için ς ve $(1/\lambda)$ değerleri

n	δ	1/λ
8	5·563	0·3030
9	4·260	0·4080
10	3·734	0·4794
11	3·447	0·5339
12	3·270	0·5781
13	3·151	0·6153
14	3·069	0·6473
15	3·010	0·6753
16	2·968	0·7001
17	2·937	0·7224
18	2·915	0·7426
19	2·900	0·7610
20	2·890	0·7779
21	2·884	0·7934
22	2·882	0·8078
23	2·882	0·8211
24	2·884	0·8336
25	2·889	0·8452
26	2·895	0·8561
27	2·902	0·8664
28	2·910	0·8760
29	2·920	0·8851
30	2·930	0·8938
31	2·941	0·9020
32	2·952	0·9097
33	2·964	0·9171
34	2·977	0·9241
35	2·990	0·9308
36	3·003	0·9372
37	3·016	0·9433
38	3·030	0·9492
39	3·044	0·9548
40	3·058	0·9601
41	3·073	0·9653
42	3·087	0·9702
43	3·102	0·9750
44	3·117	0·9795
45	3·131	0·9840
46	3·146	0·9882
47	3·161	0·9923
48	3·176	0·9963
49	3·192	1·0001
50	3·207	1·0038
52	3·237	1·0108
54	3·268	1·0174
56	3·298	1·0235
58	3·329	1·0293
60	3·359	1·0348

n	δ	1/λ
62	3·389	1·0400
64	3·420	1·0449
66	3·450	1·0495
68	3·480	1·0540
70	3·510	1·0581
72	3·540	1·0621
74	3·569	1·0659
76	3·599	1·0695
78	3·628	1·0730
80	3·657	1·0763
82	3·686	1·0795
84	3·715	1·0825
86	3·744	1·0854
88	3·772	1·0882
90	3·801	1·0909
92	3·829	1·0934
94	3·857	1·0959
96	3·885	1·0983
98	3·913	1·1006
100	3·940	1·1028
105	4·009	1·1080
110	4·076	1·1128
115	4·142	1·1172
120	4·207	1·1212
125	4·272	1·1250
130	4·336	1·1285
135	4·398	1·1318
140	4·460	1·1348
145	4·521	1·1377
150	4·582	1·1403
155	4·641	1·1428
160	4·700	1·1452
165	4·758	1·1474
170	4·816	1·1496
175	4·873	1·1516
180	4·929	1·1535
185	4·985	1·1553
190	5·040	1·1570
195	5·094	1·1586
200	5·148	1·1602
205	5·202	1·1616
210	5·255	1·1631
215	5·307	1·1644
220	5·359	1·1657
225	5·410	1·1669
230	5·461	1·1681
235	5·511	1·1693
240	5·561	1·1704
245	5·611	1·1714
250	5·660	1·1724

n	δ	1/λ
260	5·757	1·1744
270	5·853	1·1761
280	5·946	1·1779
290	6·039	1·1793
300	6·130	1·1808
310	6·220	1·1821
320	6·308	1·1834
330	6·396	1·1846
340	6·482	1·1858
350	6·567	1·1868
360	6·651	1·1879
370	6·733	1·1888
380	6·815	1·1897
390	6·896	1·1906
400	6·976	1·1914
410	7·056	1·1922
420	7·134	1·1929
430	7·211	1·1937
440	7·288	1·1943
450	7·363	1·1950
460	7·438	1·1956
470	7·513	1·1962
480	7·586	1·1968
490	7·659	1·1974
500	7·731	1·1979
520	7·873	1·1989
540	8·013	1·1998
560	8·151	1·2007
580	8·286	1·2015
600	8·419	1·2023
620	8·550	1·2030
640	8·679	1·2036
660	8·806	1·2043
680	8·931	1·2049
700	9·054	1·2054
720	9·176	1·2060
740	9·297	1·2065
760	9·415	1·2069
780	9·533	1·2073
800	9·649	1·2078
820	9·763	1·2082
840	9·876	1·2086
860	9·986	1·2089
880	10·098	1·2093
900	10·208	1·2096
920	10·316	1·2100
940	10·423	1·2103
960	10·529	1·2106
980	10·634	1·2109
1000	10·738	1·2111

$X(\sqrt{b_1}) = \delta \sinh^{-1}(\sqrt{b_1}/\lambda)$

Kaynak: D'Agostino Ralph-Pearson E.S., "Tests For Departure From Normality .Empirical Results for the Distributions Of b_2 And $\sqrt{b_1}$ ", Biometrika 60,1973,621.

hesaplanmasından sonra b_2 ile aynı ilk üç momente sahip Pearson V.tip dağılım olan bir χ^2 değişkeninin tersini almışlardır. Sonra da bu χ^2 değişkeninin doğrusal fonksiyonuna Wilson-Hilferty dönüşümü uygulayarak z standart normal değişkeni elde etmişlerdir. [34]

$$\chi^2 = v\left\{1-\frac{2}{9}+z\left(\frac{2}{9}\right)^{1/2}\right\}^3$$

olarak tanımlanan Wilson-Hilferty formülü [35] serbestlik derecesi $v > 100$ için χ^2 değerlerini yaklaşık olarak vermektedir.

Ascombe ve Glynn ise

$$A = 6+\frac{8}{[\beta_1(b_2)]^{1/2}}\left\{\frac{2}{[\beta_1(b_2)]^{1/2}}+\left[1+\frac{4}{\beta_1(b_2)}\right]^{1/2}\right\} \tag{43}$$

formülünün χ^2 değişkeninin serbestlik derecesi v 'ye eşit olduğunu belirtmektedirler. b_2 'nin standart biçime dönüştürülmüş hali de

$$X = (b_2 - E(b_2))/[\mathrm{var}(b_2)]^{1/2}$$

olarak gösterilirse b_2 'nin standart normal değişkeni, $n \geq 20$ için,

$$z = \left\{\left(1-\frac{2}{9A}\right)-\left[\frac{1-(2/A)}{1+x[2/A-4]^{1/2}}\right]^{1/3}\right\}(2/9A)^{-1/2}$$

olacaktır.

Bu dönüşüm sonucu elde edilen z, $z \sim N(0,1)$ olup normallik testi için, z 'in normal dağılım çizelgesindeki $z_{\alpha/2}$ kritik değerleri ile karşılaştırılması yeterlidir.

Çizelge 2 verilerine Anscombe ve Glynn yaklaşımı uygulanacak olursa:

$$b_2 = 2.5451354 \quad E(b_2) = 3(24)/26 = 2.7692308$$

$$\mathrm{var}\, b_2 = \frac{(24)(25)(23)(22)}{(676)(28)(30)} = \frac{303600}{567840} = 0.5346676 \quad \sigma(b_2) = 0.7312096$$

$$\sqrt{\beta_1(b_2)} = \frac{6(625-125+2)}{(32)(34)}\left\{\frac{6.(28)(30)}{25(23)(22)}\right\}^{1/2} = 1.7475151$$

$$x = \frac{2.5451354-2.7692308}{0.7312096} = -0.3064762$$

$$\beta_1(b_2) = 3.0534595$$

$$A = 6 + \frac{8}{1.7474151}\left\{\frac{2}{1.7474151}\left(1 + \frac{4}{3.0534595}\right)^{1/2}\right\} = 13.964029$$

$$z = \frac{\left\{\left(1 - \frac{2}{9(13.964029)}\right) - \left[\frac{1-(2/13.961029}{1-0.3064762[2/9.964029]}\right]^{1/3}\right\}}{\sqrt{(2/9(13.964029)}}$$

$$z = \frac{(0.9840861)-(0.997708)}{0.1261503} = -0.1079815$$

sonucu elde edilecektir. $\alpha = 0.05$ ile $z > z_{\alpha/2} = -1.96$ olduğundan $H_0 : \beta_2 = 3$ şeklindeki H_0'ın reddi için herhangi bir neden bulunmamaktadır. Daha önce $b_2 = 2.5451341$ test istatistiği ile elde edilen sonuç Anscombe ve Glynn yaklaşımı ile de doğrulanmaktadır.

Anscombe ve Glynn yaklaşımı $n \geq 20$ için geçerli olmasına karşın Royston'nun önerdiği b_2 normallik yaklaşımı örnek birim sayısını $(n \geq 15)$ indirmektedir. [36] Ancak n'in büyük değerleri için hesaplama güçlüğü bulunmaktadır.

Royston b_2 istatistiğini

$$w = \frac{b_2 - \varepsilon}{\Phi} \tag{44}$$

dönüşümü ile standart hale getirmektedir. ε

$$\varepsilon = 0,8 + \frac{2.2}{1 + e^{-[0.02687(n-100)]}} \tag{45}$$

olup ϕ da, $x = \ln(n/100)$ olmak üzere

$$\phi = \begin{cases} 0.17162.e^{(0.02253n)}, & 15 \leq n \leq 100 \\ e^{-0.06174} + \dfrac{0.711}{1+e^{2.0581(x-0.6374)}}, & n > 100 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu sonuçlardan türetilen

$$u = \ln(\ln(A + w + \sqrt{1+w^2}) \tag{46}$$

normal dağılmaktadır. (46) formülünde yer alan A ise

$$A = \begin{cases} \left[0.315 - 1.155x\left(1 + 0.6143x + 0.3423x^2\right)\right], & 15 \le n \le 100 \\ \left[0.3155 - 0.31287.e^{-2.295x} - 1\right], & \text{n>100} \end{cases}$$

dır.

(46) formülü çizelge 2 verilerine uygulandığında

$$b_2 = 2.5451354 \quad \varepsilon = 0.8 + \frac{2.2}{1 + e^{2.01525}} = 1.0587443$$

$$\phi = 0.17162e^{0.56325} = (0.17162)(1.7563714) = 0.3014284$$

$$x = \ln(25/100) = -1.3862944$$

$$w = \frac{2.5451354 - 1.0587443}{0.3014284} = 4.9311$$

$$A = (0.3155) - (1.155)(-1.3862944)(1 - 0.8516006 + .6578363)$$

$$A = (0.3155) + (1.6018632)(0.8062356) = 0.04074616$$

$$u = \ln\left(\ln\left(0.4074616 + 4.9311 + \sqrt{1 + (4.9311)^2}\right)\right)$$

$$u = \ln\left(\ln 10.37003\right) = \ln 2.3389206 = 0.8496$$

bulunur. Bu da H_0 bakımından diğer bulgular ile aynı doğrultudadır, yani $H_0 : \beta_2 = 3$ 'ün reddi için herhangi bir neden söz konusu değildir

3. SONUÇ

Örneklemeye dayanan, dolayısıyla da Tümevarım istatistik yöntemlerini ön plana çıkartan günümüz istatistiğinde doğru analize ulaşabilmek için verilerin normal dağılıma uygunluğunun sınanması önemli bir girdidir.

Buna karşın Kolmogorov ve Jarque –Bera dışında Türkçe yazına henüz girmemiş olup bilgisayar programlarında çoktan yerini almış olan Pearson ve Fisher çarpıklık ve basıklık ölçülerinin Türkçe yazında irdelenmesi amaçlanmıştır. Böylece bilgisayar çıktılarından elde edilen bilginin arttırılması söz konusu olacaktır.

Konuya ilişkin son bir husus gerek Excel ve SAS, gerekse SPSS paket programlarının çarpıklık ve basıklık ölçülerinin Fisher'in g_1 ve g_2 'si olduğudur. Örneğin, çizelge 2 verilerinin SPSS'de uygulanması sonucu çizelge elde edilmiştir.

Çizelge 7. Çizelge 2 verileri için SPSS çıktısı

N	Valid	25
	Missing	0
Mean		30,40
Std. Error of Mean		1,54
Median		29,00
Mode		29[a]
Std. Deviation		7,72
Variance		59,67
Skewness		,304
Std. Error of Skewness		,464
Kurtosis		-,276
Std. Error of Kurtosis		,902
Range		29
Minimum		17
Maximum		46
Sum		760

9. satırsa yer alan çarpıklık ölçüsü 0.304 (13) ile hesaplanmış olan $g_1 = 0.3036419$ ’dur. Alt satırında yer alan 0.464 ise (17)’ de verilen $se(g_1) = 0.464$ ’e eşittir.

Gene 11. satırda basıklık istatistiği hesaplanmış olan -0,276 verilmektedir. Bu da (25) formülüne göre $g_2 = -0.2765$ ’e eşittir.

Son olarak 12. satırda $se(g_2) = 0.902$ sonucuna rastlanmaktadır. Bu da (35) de verilen

$$\text{var}(g_2) = \frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)} = \frac{34560}{42540} = 0.8130999$$

$se(g_2) = 0.9017$ ’dir.

KAYNAKLAR

[1] Snedecor George W. ve Cochran William G., “Statistical Methods”, The Iowa State University Press, Ames,1967,84.

[2] Fisher R.A., “The Moments of The Distribution for Normal Samples of Measures of Departure From Normality” Proceedings of The Royal Society Of London,A, 1930,16-28.
-Pearson E.S., “ A Further Devolopment of Tests for Normality”, Biometrika 22(1930),239-249.
-Geary R.C., “The Ratio Of The Mean Deviation To The Standart Deviation As A Test Of Normality”, Biometrica 27 (1935),310-332.
-Geary R.C. ve Pearson E.S., “ Tests of Normality “, Cambridge University Press, Cambridge , 1938.

[3] Fisher R.A.,“Statistical Methods for Research Workers”, Oliver and Boyd, London,1950,15-54 ve 70-76.
-Snedecor George W. ve Cochran William G., “Statistical Methods”, The Iowa State University Press, Ames,1967.
-Croxton Frederick E., Cowden Dudley J., Klein Sidney, “Applied General Statistics, Prentice Hall Of India, New Delhi,1967,205,620-621.
-Sachs Lothar, “Statistiche Auswertungsmethoden“, Springer Verlag, Berlin,1969,322-323
-Yule Udny G. ve Kendall M.G.,”An Intoroduction To The Theory Of Statistics, Griffin,London, 1973,159 ve 450-451

[4] Shapiro S.S. and Wilk M.B., "An Analysis of Variance Test For Normality (Completely Samples), Biometrika 52 (1965),591-611.
[5] Thade Henry C. Jr., "Testing for Normality", Marcel Dekker, New York, 2002,4.
[6] Baringhaus L., Danschke R., Henze N., "Recent and Classical Tests for Normality", Communications in Statistics: Simulation and Computation,18(1989),363.
[7] Draper Norman R. ve Smith Harry, " Applied Regression Analysis, "John Wiley, New York,61-62.Halbuki aynı kitabın 1981 baskısında Normallik Testlerine ilişkin bilgi bulunmamaktadır.
-Spiegel Murray R. Ve Stephens Larry J.,"Statistics", Schum2s Outline Series, New York,1999'dan Çeviren: Alptekin Esin-Salih Çelebioğlu, "Istatistik", Nobel Yayın Dağıtım Ankara,2003,248-249. Burada da kitabın 1961 yılı birinci baskısında Normallik Testleri yer almazken 1999 yılı üçüncü baskısında Ryan-Joiner Normallik Testi bulunmaktadır.
-Stevens James, "Applied Multivariate Statistics for The Social Sciences, "Lawrence Erlbaum, New Jersey,2002,264.
-D'Agostino Ralph B. Ve Stephens Michael A., "Goodness –Of-Fit Techniques", Marcel Dekker, New York,1986.
-Thude Herry C. Jr.,"Testing for Normality Marcel Dekker, New York,2002.
[8] Türkçe Yazında bildiğim kadarı ıle dört kitap Normallik Testlerini irdelemiştir.
-Orhonbilge Neyran., "Örnekleme Yöntemleri Ve Hipotez Testleri", Avcıol Basım Yayın, Istanbul 2000,281-284. Burada Tek Değişkenli Dağılım Için Kolmogorov-Smirnov Teorik Dağılıma Uygunluk Testi Işlenmiştir.
-Genceli Mehmet,"İstatistik Ve Ekonometri İlkeleri",Filiz Kitabevi, Istanbul,2001,252-256.
Burada ise Bowman-Shenton test istatistiğinden kaynaklanan Jarque-Bera testi açıklanarak regresyondaki hata paylarına uygulanmıştır.
-Newbold Paul, "Statistics for Business and Economics",Prentice Hall, New Jersey, 1995'ten çeviren : Ümit Şenesen, "İşletme ve İktisat için İstatistik",Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2000, 461-463. Burada da Jarque-Bera testi söz konusudur.
-Şenesen Ümit, "İstatistik",Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2004, 244-245 Kitapta normallik testlerine kısaca değinilmektedir.
[9] Thode Henry C. Jr., "Testing for Normality", Marcel Dekker, New York, 2002, 4.
[10] Thode Henry C. Jr., "Testing for Normality", Marcel Dekker, New York, 2002, 6.
[11] Fisher R.A., "Statistical Methods for Research Workers", Oliver and Boyd, London, 1950, 73.
[12] Cf.: Yule Udny G.-Kendall M.G., "An Introduction to the Theory of Statistics", Griffin,London, 1973, 165.
[13] Fisher R.A., "Statistical Methods for Research Workers", Oliver and Boyd, London, 1950, 73.
[14] Snedecor George W.-Cochran William G., "Statistical Methods", The Iowa State University Pres, Ames, 1967, 87.
[15] Cf.: Fisher R.A., "Statistical Methods for Research Workers", Oliver and Boyd, London, 1950, 54.
[16] Thode Henry C. Jr., "Testing for Normality", Marcel Dekker, New York, 2002, 40.
[17] Spiegel Murray R.- Stephens Larry J., "Theory and Problems of Statistics", Schaum's Series, New York, 1999. Çeviren: Alptekin Esin-Salih Çelebioğlu, Nobel Yayın, 2003, 249.
[18] Fisher R.A., "Statistical Methods for Research Workers", Oliver and Boyd, London, 1950, 54.
[19] Yule Udny G.-Kendall M.G., "An Introduction to the Theory of Statistics", Griffin, London, 1973, 166.

[20] Anscombe F.J.-Glynn William J., “Distribution of the Kurtosis Statistic b_2 for Normal Samples”, Biometrika 70 (1983), 228.
[21] Snedecor George W.-Cochran William G., “Statistical Methods”, The Iowa State University Pres, Ames, 1967, 88.
[22] Bowman K.O.- Shenton L.R., “Omnibus Test Contours for Departures from Normality Based on $\sqrt{b_1}$ and b_2”, Biometrika 62(1975), 245.
[23] Anscombe F.J.-Glynn William J., “Distribution of the Kurtosis Statistic b_2 for Normal Samples”, Biometrika 70 (1983), 228.
[24] Fisher R.A., “Statistical Methods for Research Workers”, Oliver and Boyd, London, 1950, 54.
[25] Anscombe F.J.-Glynn William J., “Distribution of the Kurtosis Statistic b_2 for Normal Samples”, Biometrika 70 (1983), 228.
[26] Snedecor George W.-Cochran William G., “Statistical Methods”, The Iowa State University Pres, Ames, 1967, 87.
[27] Anscombe F.J.-Glynn William J., “Distribution of the Kurtosis Statistic b_2 for Normal Samples”, Biometrika 70 (1983), 228.
[28] D’Agostino Ralph B., “Transformation to Normality of the Null Distribution of g_1”, Biometrika 57 (Dec. 1970), 680.
[29] D’Agostino Ralph B., “Transformation to Normality of the Null Distribution of g_1”, Biometrika 57 (Dec. 1970), 680.
[30] D’Agostino adı geçen makalede z’yi makalenin yazıldığı tarihteki mevcut Pearson-Hartley tablosundaki n=25 ile karşılaştırmaktadır. Halen Pearson-Hartley tablolarında n 20’den itibaren başladığından karşılaştırmayı güncel hale getirebilmek için n=20 alınmıştır.
[31] D’Agostino Ralph B.- Pearson E.S., “Tests for Departure from Normality” Biometrika 60 (Dec.1973), 619.
[32] D’Agostino Ralph B.- Pearson E.S., “Tests for Departure from Normality” Biometrika 60 (Dec.1973), 620.
[33] D’Agostino Ralph B.- Pearson E.S., “Tests for Departure from Normality” Biometrika 60 (Dec.1973), 622.
[34] Anscombe F.J.-Glynn William J., “Distribution of the Kurtosis Statistic b_2 for Normal Samples”, Biometrika 70 (1983), 228.
[35] Draper Norman R.-Smith Harry, “Applied Regression Analysis”, Wiley, New York, 1998, 687.
[36] Royston J.P., “The Distribution Function of Skewness and Kurtosis”, Applied Statistics, 34(1985), 87-88.