σ

Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi

Sigma
2006/4

Araştırma Makalesi / Research Article

ON SPEKTRUM OF A SELF ADJOINT DIFFERANTIAL OPERATOR OF HIGHER ORDER WITH UNBOUNDED OPERATOR COEFFICIENT AND ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF EIGENVALUES

Ehliman ADIGÜZELOV, Yonca SEZER*

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş/Received: 21.03.2006 Kabul/Accepted: 19.10.2006

ABSTRACT

In this work, spectrum of a self adjoint differantial operator of higher order with unbounded operator coefficient has been investigated and an asymptotic formul for the eigenvalues of this differantial operator have found
Keywords: Hilbert space, eigenvalue, spectrum, resolvent, closable operator, symmetric operator, self adjoint operator.
MSC number/numarası: 34L05, 34L20, 47A10.

YÜKSEK MERTEBEDEN SINIRSIZ OPERATÖR KATSAYILI KENDİNE EŞ BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN SPEKTRUMU VE ÖZDEĞERLERİNİN ASİMTOTİK DAVRANIŞI HAKKINDA

ÖZET

Bu çalışmada, yüksek mertebeden sınırsız operatör katsayılı kendine eş bir diferansiyel operatörün spektrumu incelenmiş ve özdeğerleri için asimtotik formül bulunmuştur.
Anahtar Sözcükler: Hilbert uzayı, özdeğer, spektrum, rezolvent, kapanabilir operatör, simetrik operatör, kendine eş operatör.

1. GİRİŞ

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. H uzayında iç çarpımı $(.,.)$, normu da $\|.\|$ ile ve $H_1 = L_2(0,\pi;H)$ uzayında iç çarpımı $(.,.)_{H_1}$, normu da $\|.\|_{H_1}$ ile göstereceğiz. H den H ye tüm tam sürekli operatörlerin kümesini $\sigma_\infty(H)$ ve bir T lineer operatörünün rezolvent kümesini $\rho(T)$, spektrumunu da $\sigma(T)$ ile göstereceğiz.

H_1 uzayında

$$\ell_0(y) = (-1)^m y^{(2m)}(x) + Ay(x) \tag{1.1}$$

* Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-mail/e-ileti: ysezer@yildiz.edu.tr, tel: (0212) 449 18 00

diferansiyel ifadesini göz önüne alalım. Bu ifadede A, $D(A) \subset H$ olmak üzere $D(A)$ dan H ye

$$A = A^{*} \geq I, \quad A^{-1} \in \sigma_{\infty}(H) \tag{1.2}$$

koşullarını sağlayan bir operatördür. A operatörünün özdeğerleri $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \ldots \leq \gamma_n \leq \ldots$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörleri de sırasıyla $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

$D(L_0')$ ile H_1 uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonları kümesini gösterelim:

1) $y(x)$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre 2m. mertebeden sürekli türeve sahiptir.

2) Her $x \in [0, \pi]$ için $y(x) \in D(A)$ ve $Ay(x)$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında H uzayındaki norma göre süreklidir.

3) $y^{(2i-1)}(0) = y^{(2i-1)}(\pi) = 0 \qquad (i = 1,2,..,m)$

$D(L_0')$ H_1 uzayının bir lineer manifoldudur. $D(L_0')$ dan H_1 e

$$L_0' y = \ell_0(y)$$

lineer operatörünü göz önüne alalım.

$$k^{2m} + \gamma_j \qquad (k = 0,1,2,\ldots \quad ; j = 1,2,\ldots) \tag{1.3}$$

L_0' operatörünün özdeğerleri ve

$$M_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & ,k = 0 \quad \text{ise} \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & ,k = 1,2,\ldots\ldots\text{ise} \end{cases} \tag{1.4}$$

olmak üzere

$$M_k \cos kx.\varphi_j \qquad (k = 0,1,2,\ldots \quad ; j = 1,2,\ldots) \tag{1.5}$$

sırasıyla (1.3) özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörleridir.

L_0' operatörü simetriktir ve dolayısıyla kapanabilirdir. $L_0 = \overline{L_0'}$ olsun. $L_0 : D(L_o) \to H_1$ kapalı simetrik bir operatördür. Bu operatörün özvektörlerinden oluşan $\{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,\, j=1}^{\infty \quad \infty}$ kümesi tam olduğundan söz konusu operatör kendine eştir, [1].

$Q(x)$ $[0, \pi]$ aralığında tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör fonksiyon olsun.

a) Her $x \in [0,\pi]$ için $Q(x): H \to H$ sınırlı kendine eş bir operatördür.

b) $Q(x)$ $[0,\pi]$ aralığında zayıf ölçülebilirdir. Yani her $f, g \in H$ için $(Q(x)f, g)$ skaler fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında ölçülebilirdir.

c) $\|Q(x)\|$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında sınırlıdır.

Bu çalışmada L_0 ve $L = L_0 + Q$ operatörlerinin spektrumları incelenmiş ve özdeğerleri için asimtotik formül bulunmuştur.

[2] çalışmasında operatör katsayılı Sturm-Liouville operatörlerinin özdeğerleri için asimtotik formül bulunmuştur. [5], [6], [7], [8], [9] ve [10] çalışmalarında ve pek çok başka çalışmada operatör katsayılı çeşitli diferansiyel operatörlerin özdeğer sayısı için asimtotik formüller bulunmuştur.

2. SPEKTRUMUN İNCELENMESİ

λ, L_0 operatörünün bir özdeğeri ve $y = y(x)$ bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü olsun. Eğer $\lambda \notin \{k^{2m} + \gamma_j\}_{k=0,j=1}^{\infty\ \ \infty}$ olsaydı L_0 operatörü kendine eş olduğundan

$$y \perp \{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty\ \ \infty}$$

olurdu. Öte yandan $\{\cos kx.\varphi_j\}_{k=0,j=1}^{\infty\ \ \infty}$ kümesi tam olduğundan $y = 0$ olmalıdır. Bu çelişki $\lambda \in \{k^{2m} + \gamma_j\}_{k=0,j=1}^{\infty\ \ \infty}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla L_0 operatörünün özdeğerleri (1.3) şeklindedir. A operatörünün her γ_j özdeğerinin katlılığının sonlu olmasından L_0 operatörünün her $k^{2m} + \gamma_j$ özdeğerinin katlılığının da sonlu olduğu elde edilir.

Teorem 2.1. $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b), ve c) koşullarını sağlıyorsa her $y = y(x) \in H_1$ için $Q(x)y(x) \in H_1$ ve $Q : H_1 \to H_1$

$$Qy = Q(x)y(x)$$

operatörü sınırlı ve kendine eştir.

İspat. $\{e_i\}_1^\infty$ H de ortonormal bir taban olsun. Her $x \in [0,\pi]$ için $Q(x)$ in H den H ye sürekli lineer operatör olmasından ve iççarpımın bir sürekli fonksiyon olmasından yararlanarak her $y = y(x) \in H_1$ ve her $f \in H$ için

$$\begin{gathered}(Q(x)y(x), f) = \left(Q(x)\left(\sum_{i=1}^{\infty} (y(x), e_i) e_i \right), f \right) = \\ \left(\sum_{i=1}^{\infty} (y(x), e_i) Q(x) e_i, f \right) = \sum_{i=1}^{\infty} (y(x), e_i)(Q(x)e_i, f)\end{gathered} \tag{2.1}$$

elde edilir. $y \in H_1$ olduğundan $(y(x), e_i)$ $(i = 1,2,...)$ fonksiyonları ve varsayım gereği $(Q(x)e_i, f)$ $(i = 1,2,...)$ fonksiyonları ölçülebilirdir. Dolayısıyla $(y(x), e_i)(Q(x)e_i, f)$ $(i = 1,2,...)$ fonksiyonları ölçülebilirdir. O halde (2.1) den $(Q(x)y(x), f)$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğu elde edilir.

$\|Q(x)\|$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında sınırlı olduğundan $\|Q(x)\| < c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. O halde her $y = y(x) \in H_1$ için

$$\int_0^\pi \|Q(x)y(x)\|^2 dx \le \int_0^\pi \|Q(x)\|^2 \|y(x)\|^2 dx \le c^2 \|y\|_{H_1}^2 \tag{2.2}$$

dır. Buradan her $y = y(x) \in H_1$ için $Q(x)y(x) \in H_1$ elde edilir. Ayrıca (2.2) den her $y \in H_1$ için

$$\|Qy\|_{H_1}^2 \le c^2 \|y\|_{H_1}^2$$

ya da

$$\|Qy\|_{H_1} \le c \, \|y\|_{H_1}$$

elde edilir. Yani $Q : H_1 \to H_1$ operatörü sınırlıdır. Her $y, z \in H_1$ için

$$(Qy, z)_{H_1} = \int_0^\pi (Q(x)y(x), z(x))dx = \int_0^\pi (y(x), Q(x)z(x))dx = (y, Qz)_{H_1}$$

olduğundan $Q : H_1 \to H_1$ operatörü kendine eştir.■

$Q(x)$ a), b) ve c) koşullarını sağlayan bir operatör fonksiyon olmak üzere $L : D(L_o) \to H_1$

$$L = L_o + Q$$

lineer operatörünü göz önüne alalım. Teorem 2.1 den L nin kendine eş bir operatör olduğu elde edilir.

Teorem 2.2. $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b) ve c) koşullarını sağlıyorsa

$$\sigma(L) \subset \left[1 - \|Q\|_{H_1}, \infty\right)$$

dır.

İspat. L_o simetrik L_0' operatörünün kapanışı olduğundan tanım gereği her $y \in D(L_o)$ için

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y, \qquad \lim_{n\to\infty} L_0' y_n = L_0 y \tag{2.3}$$

olacak şekilde bir $\{y_n\}_1^{\infty} \subset D\left(L_0'\right)$ dizisi vardır. Her y_n için

$$\left(L_0' y_n, y_n\right)_{H_1} = \int_0^{\pi} \left((-1)^m y_n^{(2m)}(x) + Ay_n(x), y_n(x)\right) dx$$

$$= (-1)^m \int_0^{\pi} \left(y_n^{(2m)}(x), y_n(x)\right) dx + \int_0^{\pi} (Ay_n(x), y_n(x)) dx$$

$$= (-1)^m \left[\left[y_n^{(2m-1)}(x), y_n(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} y_n^{(2m-1)}(x), y_n'(x) dx \right] + \int_0^{\pi} (Ay_n(x), y_n(x)) dx$$

$$= (-1)^{m+1} \int_0^{\pi} \left(y_n^{(2m-1)}(x), y_n'(x)\right) dx + \int_0^{\pi} (Ay_n(x), y_n(x)) dx$$

$$= (-1)^{m+1} \left[\left[\left(y_n^{(2m-2)}(x), y_n'(x)\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(y_n^{(2m-2)}(x), y_n''(x)\right) dx \right]$$

$$+ \int_0^{\pi} (Ay_n(x), y_n(x)) dx$$

$$= (-1)^{m+2} \int_0^{\pi} \left(y_n^{(2m-2)}(x), y_n''(x)\right) dx + \int_0^{\pi} (Ay_n(x), y_n(x)) dx$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= (-1)^{2m} \int_0^{\pi} \left(y_n^{(m)}(x), y_n^{(m)}(x)\right) dx + \int_0^{\pi} (Ay_n(x), y_n(x)) dx \tag{2.4}$$

dir. $(Ay_n(x), y_n(x)) \geq (y_n(x), y_n(x))$ olduğu göz önüne alınırsa (2.4) ten

$$\left(L_0' y_n, y_n\right)_{H_1} \geq \int_0^{\pi} (y_n(x), y_n(x)) dx = (y_n, y_n)_{H_1}$$

bulunur. (2.3) ve (2.4) ten

$$\lim_{n\to\infty} (L_0' y_n, y_n)_{H_1} \geq \lim_{n\to\infty} (y_n, y_n)_{H_1}$$

ya da

$$(L_0 y, y)_{H_1} \geq (y, y)_{H_1}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten yararlanarak her $y \in D(L_o) = D(L)$ için

$$\begin{aligned}(Ly,y)_{H_1} &= ((L_0+Q)y,y)_{H_1} = (L_0y,y)_{H_1} + (Qy,y)_{H_1}\\ &\geq (y,y)_{H_1} - \left|(Qy,y)_{H_1}\right| \geq (y,y)_{H_1} - \|Qy\|_{H_1}\|y\|_{H_1}\\ &\geq (y,y)_{H_1} - \|Q\|_{H_1}\|y\|_{H_1}^2 = \left(1-\|Q\|_{H_1}\right)(y,y)_{H_1}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\sigma(L) \subset \left[1-\|Q(x)\|_{H_1}, \infty\right)$$

dır.■

L_o ve L operatörlerinin rezolventleri sırasıyla R_λ^0 ve R_λ olsun.

$$R_\lambda^0 = (L_0-\lambda I)^{-1}, \; R_\lambda = (L-\lambda I)^{-1} \text{ dır.}$$

Teorem 2.3. $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b), ve c) koşullarını sağlıyorsa L operatörü saf ayrık spektruma sahiptir.

İspat. L_0 operatörünün özdeğerleri

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \ldots$$

olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. L_o operatörünün özdeğerleri (1.3) şeklinde ve $\lim\limits_{j\to\infty}\gamma_j = \infty$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = \infty$ dır. Dolayısıyla her $\mu \in \rho(L_0)$ için R_μ^0 operatörünün $\left\{\dfrac{1}{\mu_n-\mu}\right\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerler dizisinin limiti sıfırdır. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mu_n-\mu} = 0 \qquad (\mu \in \rho(L_0))$$

dır. Ayrıca her $\dfrac{1}{\mu_n-\mu}$ özdeğerinin katlılığı sonludur. Her $\mu \in \rho(L_0) \cap R$ için $R_\mu^0 : H_1 \to H_1$ sınırlı kendine eş operatördür. Bu operatörün özvektörlerinin $\{M_k \cos kx.\varphi_j\}_{k=0,\; j=1}^{\infty \;\; \infty}$ kümesi tam ortonormal bir kümedir. Bu durumda [3] ten R_μ^0 operatörünün tam sürekli operatör olduğu bilinmektedir.

$$R_\lambda^0 - R_\mu^0 = (\lambda-\mu)R_\lambda^0 R_\mu^0$$

formülünden her $\lambda \in \rho(L_0)$ için R_λ^0 operatörünün tam sürekli olduğu elde edilir. $R_0^0 = L_0^{-1} : H_1 \to H_1$ operatörünün spektrumu

$$\left\{0, \mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \ldots, \mu_n^{-1}, \ldots\right\}$$

kümesidir. Dolayısıyla L_o operatörünün spektrumu her birinin katlılığı sonlu olan

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$$

özdeğerlerinden ibarettir. Öte yandan $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \infty$ olduğundan L_o operatörü saf ayrık spektruma sahiptir. Teorem 2.1 gereğince $Q : H_1 \to H_1$ sınırlı kendine eş bir operatördür. Bu durumda [3] den $L = L_o + Q : D(L) \to H_1$ operatörünün de saf ayrık spektruma sahip olduğu bilinmektedir.

L operatörünün özdeğerleri $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$ olsun. Her $\mu \in \rho(L)$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n - \mu} = 0$$

olduğundan $R_\mu = (L - \mu I)^{-1}$ operatörünün spektrumu

$$\left\{0, \frac{1}{\lambda_1 - \mu}, \frac{1}{\lambda_2 - \mu}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n - \mu}, \ldots\right\}$$

kümesidir. Burada her $(\lambda_n - \mu)^{-1}$ sayısı R_μ operatörünün katlılığı sonlu olan bir özdeğeridir. O halde [4] ten her $\mu \in \rho(L) \cap R$ sayısı için sınırlı kendine eş $R_\mu : H_1 \to H_1$ operatörünün tam sürekli operatör olduğu bilinmektedir.

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu$$

formülünden her $\lambda \in \rho(L)$ sayısı için R_λ operatörünün tam sürekli operatör olduğu elde edilir. ■

3. ÖZDEĞERLER İÇİN ASİMTOTİK FORMÜL

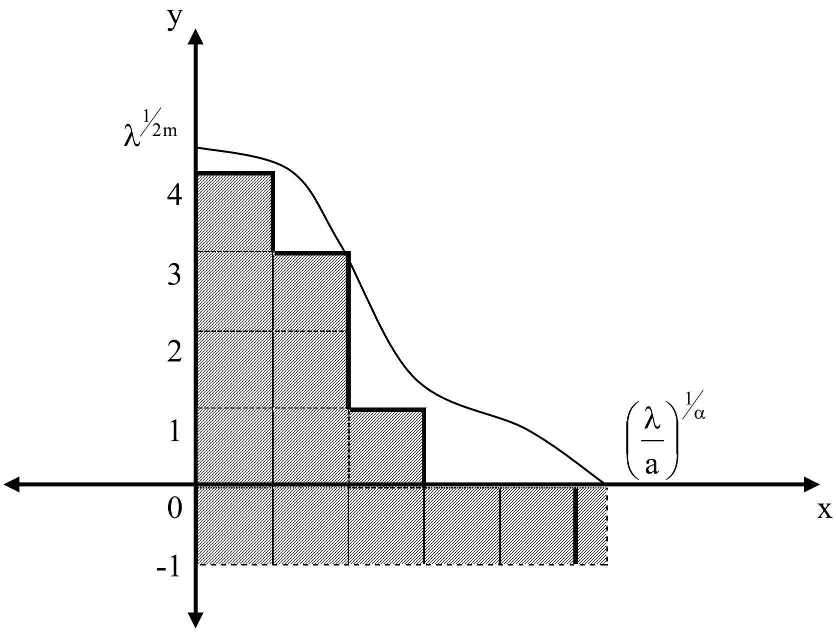
Bu kısımda L_0 ve L operatörlerinin özdeğerleri için asimtotik formül bulunacaktır. L_0 operatörünün bir λ pozitif sayısından büyük olmayan özdeğerlerinin sayısını $N(\lambda)$ ile gösterelim. Önce A operatörünün özdeğerlerinin

$$\gamma_j = a j^\alpha \qquad (0 < a, \alpha < \infty)$$

şeklinde olduğunu varsayalım. Bu durumda $N(\lambda)$

$$a j^\alpha + k^{2m} \le \lambda \qquad (j = 1,2,\ldots \quad ; k = 0,1,2,\ldots)$$

eşitsizliğini sağlayan (j,k) ikililerinin sayısıdır. (x,y) düzleminin $x=0, x=\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}$, $y=-1$ doğruları ve $ax^{\alpha}+y^{2m}=\lambda$ $\quad (x\geq 0, y\geq 0)$ eğrisi ile sınırlandırılmış kapalı alt kümesini F_{λ} ile gösterelim. $N(\lambda)$, F_{λ} kümesine ait olan (j,k) $(j=1,2,\ldots \quad ;k=0,1,2,\ldots)$ noktalarının sayısıdır. (Şekil 1)



Şekil 1.

Öte yandan

$$y=\left(\lambda-ax^{\alpha}\right)^{1/2m} \qquad \left(0\leq x\leq\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}\right)$$

fonksiyonu azalan olduğundan her $(j,k)\in F_{\lambda}$ noktasına, köşeleri $(j-1,k-1)$, $(j-1,k)$, $(j,k-1)$, ve (j,k) olan $E_{j,k}\subset F_{\lambda}$ karesi karşılık gelir. Dolayısıyla $N(\lambda)$, $E_{j,k}$ $((j,k)\in F_{\lambda})$ karelerinin sayısıdır. Yani $N(\lambda)$, $E_{j,k}\subset F_{\lambda}$

$(j = 1,2,... \quad ; k = 0,1,2,...)$ karelerinin alanlarının toplamıdır. Bu nedenle $N(\lambda)$, F_λ nın alanından büyük değildir. Yani

$$N(\lambda) \le \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} + \int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - ax^\alpha}\,dx$$

dır. Bu eşitsizlikte yer alan

$$\int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - ax^\alpha}\,dx$$

integralini hesaplayalım.

$$\int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - ax^\alpha}\,dx = \sqrt[2m]{\lambda} \int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{1 - \frac{ax^\alpha}{\lambda}}\,dx$$

dır. Burada $\frac{ax^\alpha}{\lambda} = \sin^2 t$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - ax^\alpha}\,dx = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} \frac{2}{\alpha} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2/\alpha - 1} (\cos t)^{1 + 1/m}\,dt \tag{3.1}$$

bulunur. (3.1) den

$$N(\lambda) \le \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} + \frac{2}{a^{1/\alpha}\alpha} \lambda^{\frac{1}{2m} + \frac{1}{\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2/\alpha - 1} (\cos t)^{1 + 1/m}\,dt \tag{3.2}$$

elde edilir.

$$b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2/\alpha - 1} (\cos t)^{1 + 1/m}\,dt \tag{3.3}$$

alınırsa (3.2) eşitsizliği

$$N(\lambda) \le \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} + \frac{2b}{a^{1/\alpha}\alpha} \lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} \tag{3.4}$$

şeklinde yazılır.

(x, y) düzleminin $x = 0,$ $y = 0$ doğruları ve $a(x+1)^\alpha + (y+1)^{2m} = \lambda$ $(x \ge 0, \quad y \ge 0)$ eğrisi ile sırlandırılmış kapalı alt kümesini D_λ ile gösterelim. $E_{j,k} \subset F_\lambda$ $\left(j = 1,2,... \quad ; k = 0,1,2,...\right)$ kareleri D_λ kümesini örtüyor. Öte yandan $N(\lambda)$ nın söz konusu karelerin alanlarının toplamı olduğu hatırlanırsa $N(\lambda)$ nın D_λ nın alanından küçük olmayacağı ortaya çıkar. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
N(\lambda) &\geq \int_0^{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}-1} \left[\sqrt[2m]{\lambda - a(x+1)^\alpha} - 1\right]dx = \\
&= \int_0^{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}-1} \sqrt[2m]{\lambda - a(x+1)^\alpha}\,dx - \left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha} + 1
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

dır. Burada $x + 1 = t$ dönüşümü yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}-1} \left[\sqrt[2m]{\lambda - a(x+1)^\alpha}\right]dx = \int_1^{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\,dt = \\
&\int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\,dt - \int_0^1 \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\,dt - \int_{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}}^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\,dt =
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

elde edilir. (3.1) ve (3.3) ten

$$
\int_0^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\,dt = \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}} \lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}
\tag{3.7}
$$

bulunur. Öte yandan

$$
\int_0^1 \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\,dt < \lambda^{1/2m}
\tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}}^{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[2m]{\lambda - at^\alpha}\,dt < \left[\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} - \left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}\right] . \sqrt[2m]{\lambda - a\left[\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}\right]^\alpha} \\
&< \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\alpha} - \left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

(3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9) dan

$$\int_0^{\left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{1/\alpha}-1} \sqrt[2m]{\lambda - a(x+1)^\alpha}\,dx > \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} - \lambda^{\frac{1}{2m}} - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{\lambda-1}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (3.10)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.10) dan

$$N(\lambda) > \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \lambda^{\frac{1}{2m}} \qquad (3.11)$$

bulunur. (3.4) ve (3.11) den $\lambda \to \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}$$

elde edilir.

Teorem 3.1. $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^\alpha$ $(0 < a, \alpha < \infty)$ ise $\lambda \to \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}$$

dır.

İspat. $\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. O zaman $j > M$ iken

$$1-\varepsilon < \frac{\gamma_j}{aj^\alpha} < 1+\varepsilon$$

ya da

$$(1-\varepsilon)aj^\alpha < \gamma_j < (1+\varepsilon)aj^\alpha \qquad (\forall j > M)$$

olacak şekilde $M = M(\varepsilon)$ sayısı vardır.

$$\gamma_j^{(1)} = \begin{cases} \gamma_j & , j \le M \\ (1-\varepsilon)aj^\alpha & , j > M \end{cases}, \quad \gamma_j^{(2)} = \begin{cases} \gamma_j & , j \le M \\ (1+\varepsilon)aj^\alpha & , j > M \end{cases}$$

olsun.

$$\gamma_j^{(1)} + k^{2m} \le \lambda \qquad (j = 1,2,...... \quad ; k = 0,1,2,...)$$

$$\gamma_j^{(2)} + k^{2m} \le \lambda \qquad (j = 1,2,...... \quad ; k = 0,1,2,...)$$

$$\gamma_j + k^{2m} \le \lambda \qquad (j = 1,2,...M \quad ; k = 0,1,2,...)$$

$$(1-\varepsilon)aj^\alpha + k^{2m} \le \lambda \qquad (j = 1,2,...... \quad ; k = 0,1,2,...)$$

$$(1+\varepsilon)aj^\alpha + k^{2m} \le \lambda \qquad (j = 1,2,...... \quad ; k = 0,1,2,...)$$

$(1+\varepsilon)aj^{\alpha}+k^{2m}\le\lambda \qquad (j=1,2,...M \quad ;k=0,1,2,...)$

$(1+\varepsilon)aj^{\alpha}+k^{2m}\le\lambda \qquad (j=M+1,M+2,... \quad ;k=0,1,2,...)$

eşitsizliklerini sağlayan (j,k) ikililerinin sayısı sırasıyla $N_1(\lambda)$, $N_2(\lambda)$, $N_3(\lambda)$, $N_4(\lambda)$, $N_5(\lambda)$, $N_6(\lambda)$, $N_7(\lambda)$ olsun. $\gamma_j^{(1)}\le\gamma_j\le\gamma_j^{(2)}$ $(j=1,2,...)$ olduğundan

$$N_2(\lambda)\le N\ (\lambda)\le N_1(\lambda) \tag{3.12}$$

dır. Ayrıca

$$N_1(\lambda)\le N_3(\lambda)+N_4(\lambda) \tag{3.13}$$

$$N_3(\lambda)\le 2M\lambda^{1/2m} \tag{3.14}$$

dır. (3.4) eşitsizliğinden yararlanarak

$$N_4(\lambda)\le\frac{2b}{\alpha[(1-\varepsilon)a]^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}+\left(\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.12) (3.13) (3.14) ve (3.15) ten

$$N(\lambda)\le\frac{2b}{\alpha[(1-\varepsilon)a]^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}+\left(\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+2M.\lambda^{1/2m} \tag{3.16}$$

bulunur.

$$N_2(\lambda)=N_3(\lambda)+N_7(\lambda)\ge N_7(\lambda)=N_5(\lambda)-N_6(\lambda) \tag{3.17}$$

ve

$$N_6(\lambda)\le 2M.\lambda^{1/2m} \tag{3.18}$$

dır. Öte yandan (3.11) eşitsizliğinden yararlanarak

$$N_5(\lambda)\ge\frac{2b}{\alpha[a(1+\varepsilon)]^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}-\left(\frac{\lambda}{a(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-\lambda^{1/2m} \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.12), (3.17), (3.18) ve (3.19) dan

$$N(\lambda)\ge\frac{2b}{\alpha[(1+\varepsilon)a]^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}-\left(\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-(2M+1).\lambda^{1/2m} \tag{3.20}$$

bulunur. (3.16) ve (3.20) den

$$\frac{N(\lambda)}{\frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}} + \frac{\alpha}{2b(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}.\lambda^{-\frac{1}{2m}} + \frac{\alpha M a^{1/\alpha}}{b}.\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{N(\lambda)}{\frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/\alpha}} - \frac{\alpha}{2b(1+\varepsilon)^{1/\alpha}}.\lambda^{-\frac{1}{2m}} - \frac{2\alpha M a^{1/\alpha}}{b}.\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}$$

elde edilir. Son iki eşitsizlikten

$$\frac{N(\lambda)}{\frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}} + \varepsilon \qquad (\forall \lambda > M_1) \tag{3.21}$$

$$\frac{N(\lambda)}{\frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/\alpha}} - \varepsilon \qquad (\forall \lambda > M_1) \tag{3.22}$$

olacak şekilde bir $M_1 = M_1(\varepsilon)$ pozitif sayısının var olduğu görülmektedir. Öte yandan

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/\alpha}} = 1$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.21) ve (3.22) den

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda)}{\frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} = 1$$

ya da

$$N(\lambda) \sim \frac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}.\lambda^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} \tag{3.23}$$

bulunur. ■

Teorem 3.2. $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b), ve c) koşullarını sağlıyor ve $j \to \infty$ iken $\gamma_j \sim aj^{\alpha}$ $(0 < a, \alpha < \infty)$ ise $n \to \infty$ iken

$$\lambda_n \sim dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

dır. Burada

$$d=\left(\frac{\alpha a^{1/\alpha}}{2b}\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} \quad , \quad b=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2/\alpha-1}(\cos t)^{1+1/m}dt$$

dır.

İspat. L_o operatörünün bir μ_n özdeğerinin katlılığı p_n olsun. O taktirde

$$\mu_{q_n}<\mu_{q_n+1}=\mu_{q_n+2}=...=\mu_{q_n+p_n}<\mu_n<\mu_{q_n+p_n+1},$$

$$q_n+1\le n\le q_n+p_n \tag{3.24}$$

olacak şekilde bir q_n doğal sayısı vardır.

$$N(\mu_n)=q_n+p_n\sim c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}} \tag{3.25}$$

dır. Burada $c=\dfrac{2b}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}$ dır. Öte yandan μ_n özdeğerinin p_n katlılığı

$$\gamma_j+k^{2m}=\mu_n \qquad (j=1,2,...... \quad ;k=0,1,2,...)$$

denklemini sağlayan (j,k) $(j=1,2,...... \quad ;k=0,1,2,...)$ ikililerinin sayısıdır. Dolayısıyla

$$p_n<\mu_n^{1/2m}+1\le 2\mu_n^{1/2m}$$

dır. Bu bağıntıdan

$$0<\frac{p_n}{\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}\le 2\mu_n^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.26}$$

elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\infty$ olduğundan (3.26) dan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}=0 \tag{3.27}$$

bulunur. (3.25) ve (3.27) den

$$\frac{q_n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}=\frac{N(\mu_n)-p_n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{N(\mu_n)}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}-\frac{1}{c}.\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}=1 \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.24) ten ve $N(\mu_n)=q_n+p_n$ eşitliğinden

$$\frac{q_n+1}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}\le\frac{n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}\le\frac{q_n+p_n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}=\frac{N(\mu_n)}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}} \tag{3.29}$$

bulunur. (3.25), (3.28) ve (3.29) dan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{c\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}=1$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n^{\frac{2m+\alpha}{2m\alpha}}}{n/c}=1$$

ya da

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{\left(c^{-1}n\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}}=1$$

bulunur. Böylece $n\to\infty$ iken

$$\mu_n\sim c^{-\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}n^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

dır. $c=\dfrac{2b}{\alpha a^{1/\alpha}}$ olduğundan

$$c^{-\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}=\left(\frac{\alpha a^{1/\alpha}}{2b}\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

dır. Dolayısıyla $n\to\infty$ iken

$$\mu_n\sim\left(\frac{\alpha a^{1/\alpha}}{2b}\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}n^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

ya da

$$d=\left(\frac{\alpha a^{1/\alpha}}{2b}\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

olmak üzere

$$\mu_n\sim dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}} \tag{3.30}$$

elde edilir.

Bu kez $L = L_0 + Q$ operatörünün $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$ özdeğerleri için asimtotik formul bulalım. $Q(x)$ operatör fonksiyonu a), b), c) koşullarını sağlıyorsa teorem 2.1 den dolayı $Q : H_1 \to H_1$ sınırlı ve kendine eş operatördür. Dolayısıyla her $y \in H_1$ için

$$\left|(Qy, y)_{H_1}\right| \le \|Qy\|_{H_1} \|y\|_{H_1} \le \|Q\|_{H_1} \|y\|_{H_1}^2$$

ya da

$$-\left(\|Q\|_{H_1} y, y\right)_{H_1} \le (Qy, y)_{H_1} \le \left(\|Q\|_{H_1} y, y\right)_{H_1}$$

dır. Buradan

$$-\|Q\|_{H_1} I \le Q \le \|Q\|_{H_1} I$$

elde edilir. Bu nedenle

$$L_0 - \|Q\|_{H_1} I \le L = L_0 + Q \le L_0 + \|Q\|_{H_1} I$$

dır. Bu durumda [3] den

$$\mu_n - \|Q\|_{H_1} \le \lambda_n \le \mu_n + \|Q\|_{H_1}$$

olduğu bilinmektedir. Buradan

$$1 - \frac{\|Q\|_{H_1}}{\mu_n} \le \frac{\lambda_n}{\mu_n} \le 1 + \frac{\|Q\|_{H_1}}{\mu_n}$$

bulunur. Bu bağıntıdan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1 \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.30) ve (3.31) den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\mu_n} \cdot \frac{\mu_n}{dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}} \right) = 1$$

ya da $n \to \infty$ iken

$$\lambda_n \sim dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$$

bulunur. ■

KAYNAKLAR

[1] Adıgüzelov E., Bakşi Ö., " On the regularized trace of the differantial operator equation given in a finite interval" Sigma Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi, , 47-55, 2004/1.
[2] Gorbaçuk V. İ., " Vektör fonksiyonları uzayında diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin özdeğerlerinin asimtotik davranışı hakkında" Ukr. Matem. Jurnal, T.27, No:5, 657-664, 1975, (R).
[3] Smirnov V. I., "A Course of Highe Mathematics" Vol. 5, 602, New York Pergamon.
[4] Naimark M.A., " Linear differantial operators", Part I, II, London, 1968.
[5] Kostyuchenko A. G, Levitan B.M., " Sturm Liouville Operatör probleminin özdeğerlerinin asimtotik davranışı hakkında" , Funks. analiz i ego prilojeniya, T.1, No.1, 86-96, 1967.
[6] Bayramoğlu M., "Operator katsayılı adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin sayısının asimtodu", Funk. anal. i ego primeneniya, Bakü "Elm", 144-166,1971.
[7] Aslanov G.İ., Yarı eksende verilmiş operatör katsayılı adi diferansiyel denklemlerin özdeğer sayısının asimptodu", DAN Azerb. SSR, T.32, No. 3, 3-7, 1976.
[8] Maksudov F.G., Guseynov V.G., "Yarı eksende verilmiş operator katsayılı Sturm-Liouville denkleminin özdeğer sayısının asimptodu", DAN Azerb. SSR, No.5, 1978.
[9] Aydın F., "Asymptotic Expression Of Eigenvalues Number Of Second Order Sturm-Liouville Operator Equation With Operator Coefficient Given İn Real Axis", YTÜD, 111-124, 2003/2.
[10] Bayramoğlu M., Baykal O., "Asymptotic behavior of the weighted trace of schrodinger equation with operator coefficient given in n-dimensional space", Universidad Catolica del Norte Antofagasta, Chile, Vol 18, No1, pp.91-106, 1999.