

**AN EFFECT OF GEOMETRIC NONLINEARITY ON THE STRESS CONCENTRATION IN A BENDING COMPOSITE STRIP WITH A RECTANGULAR HOLE**

**Nazmiye YAHNIOĞLU\* , Hakan AĞIT**

*Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL*

**Geliş/Received: 28.10.2004 Kabul/Accepted: 09.03.2005**

**ABSTRACT**

In this work, under bending of the uniform loading on the upper face of a strip, stress concentration of around the inner rectangular hole is investigated in the framework of the exact geometric non-linear equations of Elasticity Theory in the plane strain-state. Investigations are carried out by helping of Displacement Based Finite Element Methods and Newton-Raphson Method for linearization of system of non-linear equations.

**Keywords:** Geometric nonlinear, Composite, Hole, Finite Element Methods, Newton-Raphson Method.

**MSC number/numarası:** 74B20, 74S05.

**DİKDÖRTGEN DELİK İÇEREN KOMPOZİT ŞERİT-LEVHANIN EĞİLMESİNDE YAPIDA OLUŞAN GERİLME YIĞILMALARINA GEOMETRİK NON-LİNEERİTENİN ETKİSİ**

**ÖZET**

Bu çalışmada, yapısında dikdörtgen formda delik bulunan şerit-levhanın üst yüzeyine etkiyen düzgün yayılı yük etkisinde eğilmesi, düzlem şekil değiştirme durumunda Elastisite teorisinin geometrik non-lineer kesin denklemleri çerçevesinde delik civarında oluşan gerilme birikimleri incelenmiştir. İncelemeler yerdeğiştirme esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi ve non-lineer denklemlerin lineerleştirilmesinde Newton-Raphson yöntemi yardımıyla yapılmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** Geometrik nonlineer, Kompozit, Delik, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Newton-Raphson Yöntemi.

**1. GİRİŞ**

Yapısında geometrik süreksizlik bulunan yapı elemanlarının mekaniğine ait problemler klasik lineer Elastisite Teorisinin temel problemleri arasındadır. Bu problemlerin önemli bir kısmını da yapısında çeşitli geometrik formda delik/boşluk içeren yapı elemanları oluşturmaktadır. Çeşitli hava, deniz, kara araçlarında veya yapı elemanlarında pencere, kapı vb. gibi delikler yada malzemelerin oluşturulmasında yapıda kaçınılmaz olarak ortaya çıkan boşluklar bunlara örnek olarak verilebilir. Dolayısıyla, mühendislik açısından, çeşitli dış yüklemeler altında bu boşluklar civarında oluşan gerilme yığılmalarının öğrenilmesi büyük önem taşır.

Bu alandaki çalışmalar Savin (1961) tarafından sonsuz izotrop veya anizotrop ortamda bulunan çeşitli delik formları ve yüklemeler için, konform dönüşüm ve seriler yardımıyla, delik

Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-posta: nazmiye@yildiz.edu.tr, tel: (0212) 449 16 79

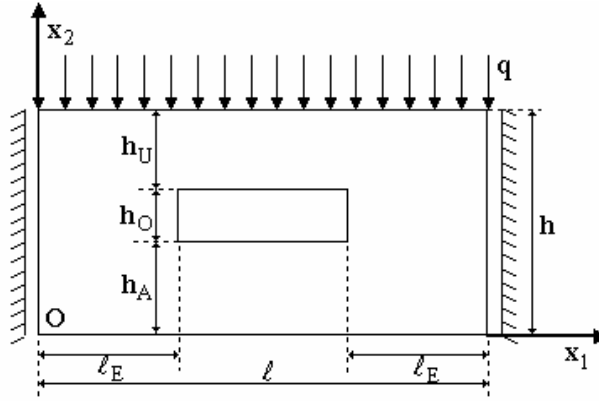
civarında oluşan gerilme yığılmaları özetlenmiştir. Sonlu ortamda bu problemlerin incelenmesi ancak sayısal yöntemlerle mümkündür. Bunlara örnek olarak [2,3,4,5] ve diğer pekçok çalışma verilebilir. Bu çalışmalarda lineer elastisite teorisi çerçevesinde, dış yükler altında sonlu izotrop veya anizotrop yapı elemanında bulunan farklı geometrik formda (dikdörtgen, üçgen, dairesel vb.) delikler etrafında oluşan gerilme yığılmaları sayısal olarak incelenmiştir. Bilindiği üzere, lineer elastisite teorisi küçük şekil değiştirme kabulüne dayanmaktadır. Yani, dış yüklerin yapıda ancak küçük şekil değiştirme yaptırdığı kabul edilerek, dış yüklemenin yapı elemanında sebep olduğu geometrik değişiklikler hesaba katılmamaktadır. Açık ki, bu modelleme ile elde edilen değerler ancak özel durumlar için geçerli olur.

[6,7,8,9] çalışmalarında tekstil tipli kompozit malzemeden yapılmış şerit-levhannın eğilmesi problemi geometrik non-lineer durumda sayısal olarak Elastisite Teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde incelenmiştir. Ancak bu çalışmalarda yapı elemanında delik vb. gibi boşluklar göz önüne alınmamıştır.

Bu çalışma yukarıda verilen iki grup çalışmanın birleştirilerek, geliştirilmesi olarak verilebilir. Yani, yapısında dikdörtgen delik içeren yapı elemanlarının geometrik non-lineer durumda modellenerek, dış yükler etkisinde delik civarında oluşan gerilme yığılmalarına non-lineeritenin etkisi, ele alınan problem çerçevesinde düzlem şekil değiştirme durumunda Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) ve Newton Raphson Yöntemi (NR) yardımıyla sayısal olarak incelenmiştir. Kullanılan Yerdeğiştirme Esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi nedeniyle ortaya çıkan süreksiz gerilme dağılımları En küçük Kareler Yöntemi (LSM) kullanılarak süreklileştirilmiştir .

## 2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL MODELİ

Ele alınan problemin matematiksel modeli düzlem şekil değiştirme durumunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. Plağa bağlı  $Ox_1x_2$  kordinat takımı ve plağın geometrik boyutları Şekil 1’de gösterildiği gibi kabul edilsin.



Şekil 1. Ele alınan şerit-levhannın geometrisi

Dolayısı ile ele alınan problemin çözüm bölgesi  $\Omega \setminus \Omega_D$  olur. Burada,

$$\Omega = \{0 \leq x_1 \leq l; 0 \leq x_2 \leq h\}, \quad \Omega_D = \{l_E \leq x_1 \leq l - l_E; h_A \leq x_2 \leq h_A + h_O\} \quad (1)$$

dır. Bu bölgede sağlanan non-lineer alan denklemleri,

### An Effect of Geometric Nonlinearity on the ...

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \sigma_{11} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \sigma_{21} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

bünye denklemleri,

$$\sigma_{11} = A_{11} \varepsilon_{11} + A_{12} \varepsilon_{22}, \sigma_{22} = A_{12} \varepsilon_{11} + A_{22} \varepsilon_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2A_{66} \varepsilon_{12} \quad (3)$$

non-lineer yerdeğiştirme-şekil değiştirme bağıntıları,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right], \quad i,j; \alpha=1,2 \quad (4)$$

ve sınır koşulları,

$$\begin{aligned} u_2|_{x_1=0;\ell} = 0, \left[ \sigma_{21} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \Big|_{x_2=0;h} &= 0, \left[ \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \Big|_{x_2=0} &= 0, \\ \left[ \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \Big|_{x_2=h} &= -q, \left[ \sigma_{11} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \Big|_{x_1=0;\ell} &= 0, \\ \left[ \sigma_{21} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \Big|_{\substack{x_2=h_A; h_A+h_0 \\ x_1 \in [\ell_E, \ell-\ell_E]}} &= 0, \left[ \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \Big|_{\substack{x_2=h_A; h_A+h_0 \\ x_1 \in [\ell_E, \ell-\ell_E]}} &= 0, \\ \left[ \sigma_{11} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \Big|_{\substack{x_1=\ell_E; \ell-\ell_E \\ x_2 \in [h_A, h_A+h_0]}} &= 0, \left[ \sigma_{21} \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \Big|_{\substack{x_1=\ell_E; \ell-\ell_E \\ x_2 \in [h_A, h_A+h_0]}} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

şeklinde verilebilir. Belirtelim ki, (2)-(5) ifadelerinde bilinen notasyonlar kullanılmıştır. (3)'de  $A_{ij}$  'ler ele alınan çok katlı kompozit malzemeye ait normalize edilmiş mekanik sabitlerdir [10].

Dolayısı ile ele alınan problemin matematiksel modeli, Lagrange koordinatları ile yazılmış (2)-(4) non-lineer denklemler takımının (5) sınır koşulları çerçevesinde çözülmesine getirilir.

Yukarıda verilen sınır değer probleminin çözümü analitik olarak mümkün olmadığından, ele alınan problemin çözümü için sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılacaktır [11].

### 3. SONLU ELEMANLAR MODELİ

Ele alınan geometrik non-lineer sınır değer probleminin Sonlu Elemanlar Modeli için aşağıda verilen fonksiyonel kullanılır.

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega \cup \Omega_D} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_S q_i u_i dS. \quad (6)$$

Burada,

$$S = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3 \cup \ell_4$$

$$L_1 = \{(x_1, x_2) | x_2 = 0; x_1 \in [0, \ell]\}, \quad L_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 = \ell; x_2 \in [0, h]\},$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= \{(x_1, x_2) | x_2 = h; x_1 \in [0, \ell]\}, L_4 = \{(x_1, x_2) | x_1 = 0; x_2 \in [0, h]\}, \\
\ell_1 &= \{(x_1, x_2) | x_2 = h_A; x_1 \in [\ell_E, \ell - \ell_E]\}, \ell_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 = \ell - \ell_E; x_2 \in [h_A, h_A + h_O]\}, \\
\ell_3 &= \{(x_1, x_2) | x_2 = h_A + h_O; x_1 \in [\ell_E, \ell - \ell_E]\}, \ell_4 = \{(x_1, x_2) | x_1 = \ell_E; x_2 \in [h_A, h_A + h_O]\} \quad (7)
\end{aligned}$$

dir. (6) fonksiyonelinin birinci varyasyonelinin sifira eşitliğinden (2) diferansiyel denklemi ve (5)' de verilen gerilmelere göre sınır koşulları elde edilir. Yani (2) diferansiyel denklemleri (6) fonksiyonelinin Euler denklemleridir [12].

Ele alınan problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözümü için, problemin çözümü bölgesi  $\Omega \setminus \Omega_D$  (Şekil 1) sonlu adet  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) sonlu elemanlarına ayrıştırılır ve

$$\Omega \setminus \Omega_D = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (8)$$

dir. Aranılan çözüm, yöntem gereği, her bir sonlu elemanda polinom şeklinde seçilir. Bu çalışmada, Yerdeğiştirme Esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanıldığından her bir sonlu elemanda aranılan fonksiyon yerdeğiştirme fonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$u^{(k)} \approx N^{(k)} a^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (9)$$

seçilir. (9)'da altı çizili indislere göre Einstein toplama uyluşımı uygulanmayacaktır. Ayrıca (9)' da

$$\begin{aligned}
\left(u^{(k)}\right)^T &= \left(u_1^{(k)}(x_1, x_2) \quad u_2^{(k)}(x_1, x_2)\right), \left(a^{(k)}\right)^T = \left(u_{11}^{(k)} \quad u_{21}^{(k)} \quad \dots \quad u_{19}^{(k)} \quad u_{29}^{(k)}\right) \\
N^{(k)} &= \begin{pmatrix} \underline{N_1^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_2^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_3^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_4^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_5^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_6^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_7^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_8^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_9^{(k)}} & \underline{0} \\ 0 & \underline{N_1^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_2^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_3^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_4^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_5^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_6^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_7^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_8^{(k)}} & \underline{0} & \underline{N_9^{(k)}} \end{pmatrix} \\
k &= 1, 2, \dots, M \quad (10)
\end{aligned}$$

dir. (9) ve (10)'da (k) üst indisi, ele alınan büyüklüğün  $\Omega_k$  sonlu elemanına ait olduğunu göstermektedir.  $a^{(k)}$  vektörünün (10)'da gösterilen bileşenleri,  $\Omega_k$  sonlu elemanının nodlarındaki yer değıştirmelerdir. Her bir bileşenin, birinci alt indisi yer değıştirmenin doğrultusunu, ikinci alt indisi nodun yerel numarasını göstermektedir. Her sonlu elemanda (10) şeklinde seçilen çözümler (6)'da yerine yazılır ve bilinen Ritz tekniğı yardımıyla

$$\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{r} \quad (11)$$

şeklinde non-linear cebirsel denklemlere dönüştürülür [12]. Burada  $\mathbf{a}^T = (a^{(1)} \quad a^{(2)} \quad \dots \quad a^{(M)})$  dir.  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(M)}$  'nin ifadeleri (10)'da verilmektedir.

Sonuçta, ele alınan (2)-(4) non-linear sınırdeğer probleminin (5) sınır koşulları çerçevesinde incelenmesi Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla (11) non-linear cebirsel denklemler takımının incelenmesine getirilmiş olunur. Belirtelim ki, (11) denklemlerinde non-linear terimler ihmal edilirse, bu denklemler takımı [5]'de verilen,

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (12)$$

lineer denklem sistemine dönüşmektedir. (12)'de  $\mathbf{K}$ -Rijidlik,  $\mathbf{a}$ -bilinmeyenleri içeren ve  $\mathbf{r}$ -sağ taraf matrisleridir.

#### 4. NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİ VE TEĞET RİJİDLİK MATRİSİ

(11) non-lineer cebirsel denklemler takımı Newton-Raphson yöntemi yardımıyla lineerleştirilerek, iterasyonlarla çözülecektir. Bu yönteme göre, keyfi bir çözüm vektörü örneğin,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 \quad (13)$$

seçilmiş olsun. Bu çözüm (11) cebirsel denklemler takımının kesin çözümü olmadığından, (11)'de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_0) \quad (14)$$

şeklinde bir hata meydana gelir. Böyle bir hatanın oluşmaması için (13) şeklinde seçilen ilk çözüme bir artım verilerek,

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1 \quad (15)$$

şeklinde yeni bir çözüm vektörü yazılır. Burada  $\delta \mathbf{a}_1$ , (14)'deki hatayı sıfırlayacak şekilde belirlenmesi gereken bir çözümdür, yani

$$\Psi(\mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1) = \mathbf{r} \quad (16)$$

denkleminin sağlandığı kabul edilir.  $\delta \mathbf{a}_1$ 'in bulunması için (16) denklemini lineerleştirilirse,

$$\Psi(\mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1) \approx \Psi(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 \quad (17)$$

olur. Buradan (17), (16)'da yerine yazılırsa

$$\Psi(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r} \quad (18)$$

elde edilir. (18)'de (14) göz önüne alınırsa,

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 \text{ veya } \mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0) \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 \quad (19)$$

şeklinde olur. Burada  $\mathbf{K}_T$  matrisine *Teğet Stiffness Matrisi* adı verilir ve

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \quad (20)$$

dir [12]. (19) lineer denklem sisteminden  $\delta \mathbf{a}_1$  belirlenir (15)'de yerine yazılırsa (11) denklemler sistemi için yeni bir çözüm elde edilir. Eğer elde edilen (15) çözümü kesin çözüm ise (11) non-lineer denklemler sistemini özdeşlikle sağlar. Aksi halde (14)'dekine benzer şekilde,

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_1) \quad (21)$$

bir hata meydana gelir. (15)-(20) işlemleri, (21) göz önüne alınarak ve  $\mathbf{a}_0$  yerine  $\mathbf{a}_1$  çözümü kullanılarak tekrarlanır. Son elde edilen çözümün istenilen hassasiyetle (11) denklemini sağladığı durumda iterasyon işlemi sonlandırılır.

Belirtelim ki, ele alınan sınır değer problemine ait (11) non-lineer cebirsel denklemler takımının çözümü yukarıda verilen (14)-(20) iterasyonu kullanılarak yapılmıştır. İterasyona giren ilk çözüm olarak (12) denklem takımının çözümü seçilmiştir.

## 5. GERİLMELERİN BELİRLENMESİ

Bu çalışmada *Yerdeğiştirme Esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi* kullanıldığından, her bir nodda bilinmeyen olarak sadece yerdeğiştirmeler alınmıştır. Yani Sonlu Eleman çözümü bize ancak nodlardaki yerdeğiştirmeleri verecektir. Gerilme fonksiyonları Hooke Yasası yardımıyla bulunur [13]. Yani,

$$\hat{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}^T = \{\hat{\sigma}_{11} \quad \hat{\sigma}_{22} \quad \hat{\sigma}_{12}\}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12}\} \quad (24)$$

burada,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{66} \end{bmatrix} \quad (25)$$

dir.

Bilindiği üzere sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözüm, bütün bölgede  $C^0$  sürekliliğine sahiptir. Dolayısıyla sonlu eleman çözümünden elde edilen (9) yerdeğiştirme fonksiyonu kullanılarak bulunan (24) gerilme fonksiyonu sonlu eleman sınırlarında süreksiz olur. Bu ise, ancak yöntemden kaynaklanan bir durumdur. Bu nedenle gerilme fonksiyonları yeniden Sonlu Elemanlar Yöntemi ve En Küçük Kareler Yöntemi yardımıyla süreklileştirilmiştir.

Gerilme fonksiyonlarına ait sonlu eleman ağı, yerdeğiştirmelere ait sonlu eleman ağı ile aynı alınmıştır. Buna göre, her sonlu elemanda gerilme fonksiyonu

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} \approx \mathbf{N}_{\sigma}^{(k)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(k)} \quad (26)$$

şeklinde temsil edilir. Burada,

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(k)} \\ \sigma_{22}^{(k)} \\ \sigma_{12}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11}^{(k)} \\ \bar{\sigma}_{22}^{(k)} \\ \bar{\sigma}_{12}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_{\sigma}^{(k)} = \left( \mathbf{N}_{\sigma}^{(1)}, \mathbf{N}_{\sigma}^{(2)}, \dots, \mathbf{N}_{\sigma}^{(M)} \right) \quad (k=1,2,\dots,M) \quad (27)$$

ve (27)'de,

$$\mathbf{N}_{\sigma}^{(k)} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & \dots & N_9 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & \dots & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \dots & 0 & 0 & N_9 \end{pmatrix} \quad (28)$$

şekindedir. Belirtelim ki (28)'de kullanılan Şekil fonksiyonları yerdeğiştirmelerin bulunmasında kullanılan şekil fonksiyonları olarak seçilmiştir. (26) yardımıyla elde edilen gerilme fonksiyonu ile (24) yardımıyla elde edilen süreksiz gerilme fonksiyonu arasında En Küçük Kareler Yöntemi yardımıyla,

$$Q = \iint_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^2 d\Omega \quad (29)$$

fonksiyoneli kurulur ve nodlarda bilinmeyen gerilme değerleri

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ijk}} = 0, \quad i, j=1,2; \quad k=1,2,\dots,M \quad (30)$$

denklem sisteminden belirlenir.

## 5. SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal sonuçların elde edilmesinde ele alınan yapı malzemesinin,  $x_2 = 0$  düzlemine paralel yerleştirilen ve birbirini tekrar eden farklı iki tür levhadan oluşan, çok katlı kompozit malzemenin yapıldığı kabul edilmiştir. Ele alınan kompozit malzemenin bileşenlerinden matris malzemesine ait büyüklükler alt indis "1", güçlendirici malzemeye ait büyüklükler alt indis "2" ile gösterilecektir. Buna göre ele alınan kompozit malzemenin bileşenlerinin mekanik sabitleri: Matris (güçlendirici) malzemesinin;  $E_1$  ( $E_2$ ) Elastisite Modülü,  $\nu_1$  ( $\nu_2$ ) Poisson oranı,  $\lambda_1$  ( $\lambda_2$ ) Lamé sabiti,  $\mu_1$  ( $\mu_2$ ) Kayma Modülü ve  $\eta_1$  ( $\eta_2$ ) kompozit malzeme içerisindeki hacim oranıdır. Buna göre ele alınan kompozit malzemenin mekanik sabitleri, onu oluşturan bileşenlerin mekanik sabitleri yardımıyla, [10] ve diğer birçok kaynakta verildiği gibi,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2 + (\mu_1 + \lambda_1) \eta_1 + (\mu_2 + \lambda_2) \eta_2 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(2\mu_1 + \lambda_1) \eta_2 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_1} ; \\ A_{12} &= \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \eta_1 \eta_2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)}{(2\mu_1 + \lambda_1) \eta_2 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_1} ; A_{66} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_1} ; \\ A_{22} &= (2\mu_1 + \lambda_1) \eta_1 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{[(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)]^2}{(2\mu_1 + \lambda_1) \eta_2 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_1} \end{aligned} \quad (31)$$

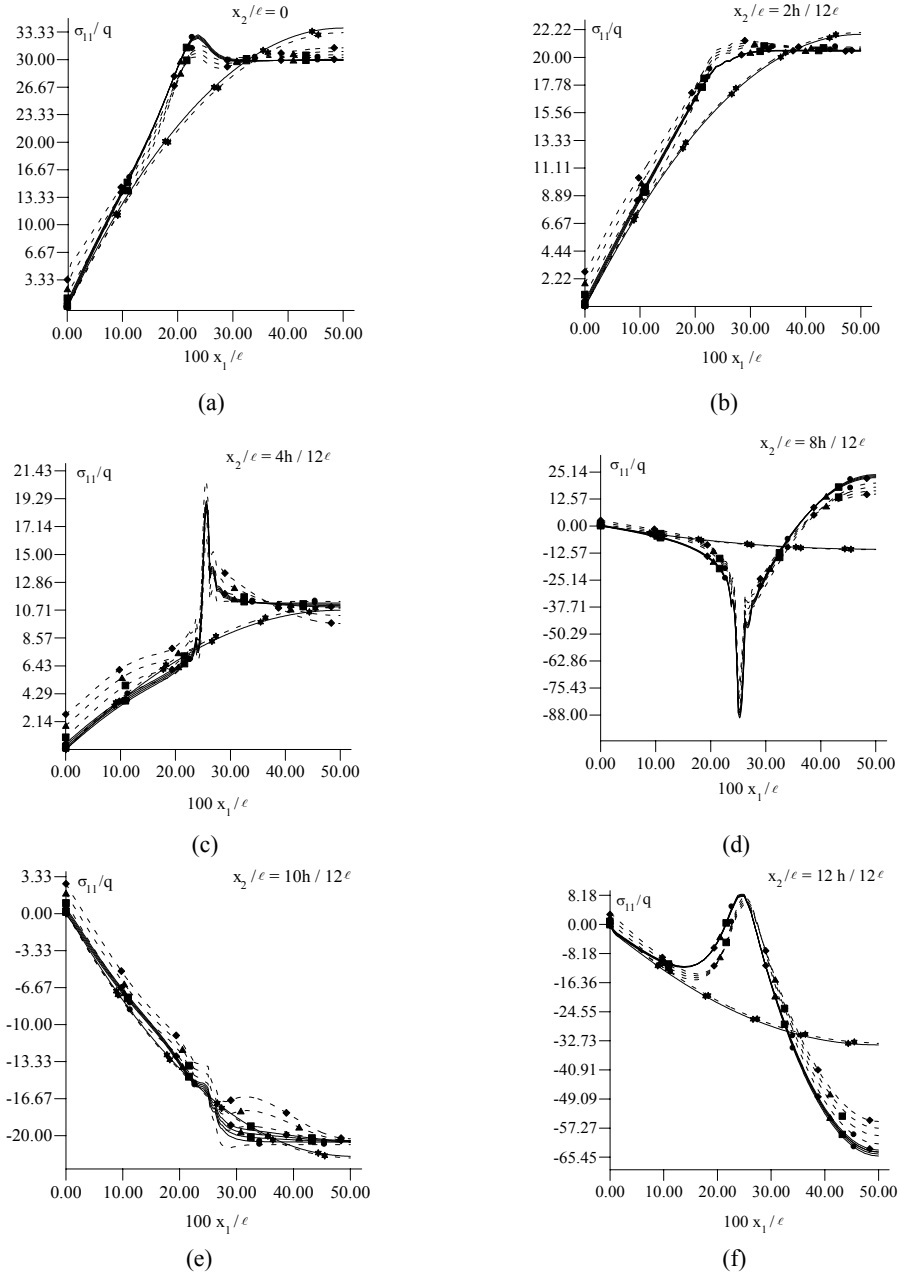
şeklinde bulunur.

Ele alınan yükleme durumu ve sınır koşulu için (2)-(5) geometrik non-lineer sınır değer probleminin incelenmesinde, yapıda bulunan dikdörtgen delikten dolayı, delik civarında oluşan gerilme birikimlerine, non-lineeritenin ( $P/E_1$ ) etkisi ele alınmıştır. Problemin incelenmesinde bu parametrelerin yakınsaklık sınırlarının belirlenmesi gerekir. Çünkü, seçilen parametrenin her değerinde sayısal sonuçlar yakınsak çıkmaz ancak,  $P/E_1 \leq P^*/E_1$  için yakınsak sonuçlar elde edilmektedir. Parametrelerin bazı değerlerinde elde edilen  $P^*/E_1$  değerleri Tablo 1'de verilmektedir.

**Tablo 1.** Bazı parametre değerleri için  $P^*/E_1$  değerleri  
( $h/\ell = 0.15, h_A = h_O = h_U = 0.05\ell$ )

$E_2/E_1$	$\ell_E/\ell$	$P^*/E_1$
1	0.15	0.0005
	0.25	0.008
	0.35	0.0011
10	0.15	0.003
	0.25	0.003
	0.35	0.004

Bu çalışmada, sayısal sonuçların elde edilmesinde kullanılan program ve algoritmalar tarafımızdan yapılmış olup, Sonlu Eleman Modellemesinde 480 sonlu eleman, 2025 nod ve 4000 serbestlik derecesi (NDOF) kullanılmıştır.

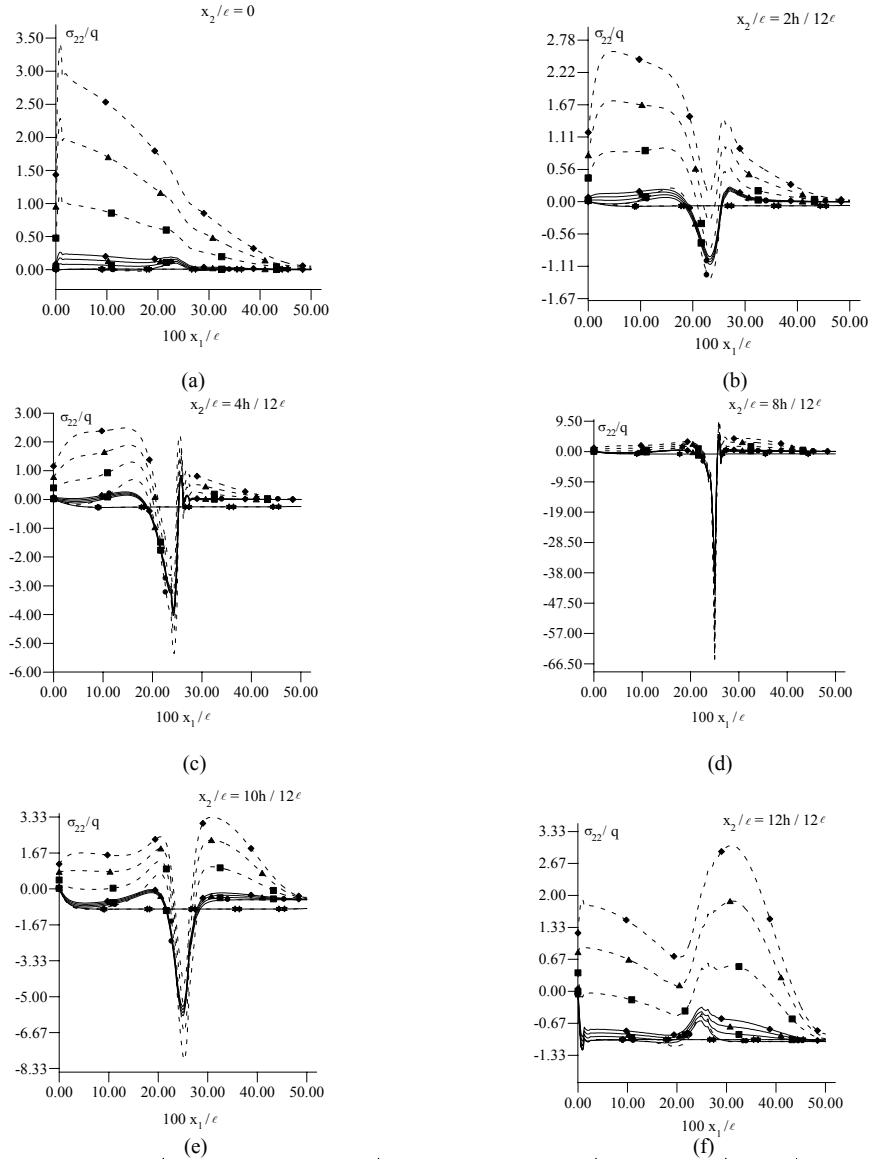


Şekil 2.  $\sigma_{11}/q$  gerilmesinin farklı  $P/E_1$  değerleri için a)  $x_2/\ell = 0$ , b)  $x_2/\ell = 2h/12\ell$ , c)  $x_2/\ell = 4h/12\ell$ , d)  $x_2/\ell = 8h/12\ell$ , e)  $x_2/\ell = 10h/12\ell$ , f)  $x_2/\ell = 12h/12\ell$  kesitlerinde  $x_1/\ell$ ' den bağımlılığı, ●-  $P/E_1 = 0$ ; □-  $P/E_1 = 0.00005$ ; △-  $P/E_1 = 0.0001$ ; ◇-  $P/E_1 = 0.00015$ ; ★-  $P/E_1 = 0, h_0 = 0$



*An Effect of Geometric Nonlinearity on the ...*

Aşağıda, verilen bütün grafiklerde  $h/\ell = 0.15, h_A = h_O = h_U = 0.05\ell, \ell_E/\ell = 0.25$  ve kesikli çizgiler ile gösterilen grafikler  $E_2/E_1 = 1$ , sürekli çizgiler ile gösterilen grafikler  $E_2/E_1 = 10$  için verilmiştir.



**Şekil 3.**  $\sigma_{22}/q$  gerilmesinin farklı  $P/E_1$  değerleri için a)  $x_2/\ell = 0$ , b)  $x_2/\ell = 2h/12\ell$ , c)  $x_2/\ell = 4h/12\ell$ , d)  $x_2/\ell = 8h/12\ell$ , e)  $x_2/\ell = 10h/12\ell$ , f)  $x_2/\ell = 12h/12\ell$  kesitlerinde  $x_1/\ell$ ' den bağımlılığı, ●-  $P/E_1 = 0$ ; □-  $P/E_1 = 0.00005$ ; △-  $P/E_1 = 0.0001$ ; ◇-  $P/E_1 = 0.00015$ ; ★-  $P/E_1 = 0, h_O = 0$

Şekil 2’de,  $\sigma_{11}/q$  gerilmesinin non-lineerite parametresi  $P/E_1$  ’in farklı değerleri için altı ayrı kesitte, izotrop ( $E_2/E_1 = 1$ ) ve anizotrop ( $E_2/E_1 = 10$ ) durumda  $x_1/\ell$  ’ye göre dağılımı verilmektedir. Verilen grafiklerde kesikli çizgiler ile gösterilen grafikler izotrop, sürekli çizgiler ile gösterilen grafikler anizotrop durumda elde edilmiştir. Grafiklerden görüldüğü gibi yapı elemanında dikdörtgen delik olması gerilme dağılımını önemli ölçüde etkilemektedir. Bu etki, dikdörtgen deliğin köşeleri civarında çok daha fazladır, ayrıca bu köşe noktaları civarında oluşan gerilme dağılımları birbiriyle kıyaslandığında özellikle yüklemeye yakın olan köşe civarındaki gerilmenin diğerine göre daha büyük olduğu görülmektedir. Bundan başka non-lineerite çarpanı olan  $P/E_1$  ’in değişimi hem izotrop ( $E_2/E_1 = 1$ ) hem de anizotrop ( $E_2/E_1 = 10$ ) durumda gerilme dağılımlarını etkilemektedir ve  $P/E_1$  değeri arttıkça her iki durumda da gerilmenin şiddeti mutlak değerce küçülmektedir. Belirtelim ki non-lineerite çarpanının etkisi izotrop durumda anizotrop duruma göre daha fazladır.

Şekil 3’de  $\sigma_{22}/q$  gerilmesinin, non-lineerite parametresi  $P/E_1$  ’in farklı değerlerinde izotrop ve anizotrop durumda altı ayrı kesitte  $x_1/\ell$  ’ den bağımlılığını gösteren grafikler verilmektedir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi  $P/E_1$  ’in yani non-lineerite çarpanının değişimi Şekil 2’de olduğu gibi Şekil 3’de de gerilme dağılımlarını etkilemektedir. Fakat bu etki bu değer arttıkça, dikdörtgen delik civarındaki gerilme değerlerini mutlak değerce düşürürken, diğer kısımlarda artışa neden olmaktadır. Belirtelim ki,  $\sigma_{12}/q$  gerilmesi yayılımına,  $P/E_1$  parametresi değişimi az etki gösterdiği için burada yer verilmemiştir.

#### KAYNAKLAR

- [1] Savin G.N., “Stress Concentration Around Holes”, E. Gros Translator, Pergomon, Oxford, 1961.
- [2] Jong T.De., “Stress Around Rectangular Holes in Orthotropic Plates”, J. Composite Materials, 15:311-328, 1981.
- [3] Yahnioğlu N., Mermer A., “Kare delik içeren çok katlı kompozit malzemeden oluşan şerit-plaktaki gerilme dağılımı”, XII. Ulusal Mekanik Kongresi 10-14 Eylül 2001 Selçuk Üni.-Konya , 2001, 853-859.
- [4] Lei G.H., Charles, W.W. Ng, Rigby, D.B., “Stress and Displacement Around an Elastic Artificial Rectangular Holes”, Journal of Engineering Mechanics, September, 880-890, 2001.
- [5] Yücel A.M., “Dikdörtgen Delik içeren Kompozit Kiriş Levhaların Eğilmesindeki Gerilme Dağılımı Problemleri”, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Y.T.Ü., 2002.
- [6] Selim, S., “Bazı Non-Linear Sınır Değer Problemlerinin FEM İle İncelenmesi”, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Y.T.Ü., 1999.
- [7] Yahnioğlu N., Selim S., “Homojen olmayan anizotrop malzemeden yapılmış şerit için bir geometrik non-lineer problemin incelenmesi”, X. Ulusal Mekanik Kongresi, 15-19 Eylül 1997, İstanbul, 1997, 443-452.
- [8] Yahnioğlu N., Selim S., “The stability loss of the strip fabricated from the composite material with periodically curved structure”, Continuum Models and Discrete System 9 (CMDS 9) 29 June-3 July İstanbul-Turkey ,1998, 832-835.
- [9] Yahnioğlu N., Selim S., “Bending of the strip fabricated from the composite material with curved structure in the geometrical non-lineer statement”. Mechanics of Composite Materials, No. 4-5, 2000.
- [10] Cristensen R.M., “Mechanics of Composite Materials”, John Wiley & Sons, Inc., 1979.

*An Effect of Geometric Nonlinearity on the ...*

- [11] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., "Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity", The Finite Element Method 4<sup>th</sup> Ed. Vol 2, McGraw-Hill Book Company., 1989.
- [12] Ağıt H., "Dikdörtgen Delik İçeren Şerit-Levhaya Ait Bir Non-Lineer Sınır Değer Probleminin FEM İle İncelenmesi", Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Y.T.Ü., 2004.
- [13] Timoshenko S.P., Goodier J.N., "Theory of Elasticity", Third Edition, McGraw-Hill International Editions, London, 1970.