σ Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi
Sigma
2004/3

ON THE ASYMPTOTIC EXPRESSION OF THE NUMBER OF EIGENVALUES OF DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE OPERATOR COEFFICIENT

Seda KIZILBUDAK*

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş/Received: 23.03.2003 Kabul/Accepted: 22.06.2004

ABSTRACT

In this study we prove the pure discrete property of the spectrum and found the asymptotic expression of N (λ) the number of eigenvalues $< \lambda$ ($\lambda > 0$) when $\lambda \to \infty$ of Loperator in space $L_2(0,\infty;H)$. L operator is formed by

$y^{IV} + \sum_{j=1}^{2} P_j(x) y^{(3-j)} + Q(x)y$, $0 < x < \infty$ differential expression with boundary conditions

$\begin{array}{l} y''(0) - ay'(0) = 0 \\ y'''(0) - by(0) = 0 \end{array}$. Here H is a separable Hilbert space, a,b are real constants, the operator valued functions Q(x) , $P_j(x)$ $(j = 1,2)$ are defined in the H Hilbert space and satisfy the following conditions

$Q^*(x) = Q(x) \geq I$ (I is the unit operator in H) , $Q^{-1}(x) \in \sigma_\infty$,

$\| P_j(x) Q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}(x) \| < c$ $(j = 1,2$ $c = \text{const.} > 0;$ $\varepsilon > 0)$.

Keywords: Hilbert space, self-adjoint operator, resolvent, spectrum

OPERATÖR KATSAYILI BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÖZDEĞERLERİ SAYISININ ASİMTOTİK İFADESİ ÜZERİNE

ÖZET

Bu çalışmada H ayrılabilir Hilbert uzayı olmak üzere $L_2(0,\infty;H)$ Hilbert uzayında

$y^{IV} + \sum_{j=1}^{2} P_j(x) y^{(3-k)} + Q(x)y$, $0 < x < \infty$ diferansiyel ifadesi ve

$\begin{array}{l} y''(0) - ay'(0) = 0 \\ y'''(0) - by(0) = 0 \end{array}$. sınır koşulları ile oluşturulan L operatörünün spektrumunun saf ayrık olduğu ve L nin $\lambda > 0$ sayısını aşmayan özdeğerleri sayısı $N(\lambda)$ nın $\lambda \to \infty$ iken asimtotik ifadesi bulunmuştur. Burada a,b reel sabitler, Q(x); $Q^*(x) = Q(x) \geq I$ (I, H da birim operatör), $Q^{-1}(x) \in \sigma_\infty$ ve $\| P_j(x) Q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}(x) \| < c$ (j=1,2; c = sbt.>0, $\varepsilon > 0$) koşullarını sağlayan H da dönüşüm yapan operatör değerli fonksiyonlardır.

Anahtar Sözcükler: Hilbert uzayı, kendine-eş operator, rezolvent, spektrum

* e-mail:skizilb@yildiz.edu.tr, Tel: (0212) 449 1532

1. GİRİŞ

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $L_2(0,\infty;H)$ ayrılabilir. Hilbert uzayında

$$y^{IV} + \sum_{j=1}^{2} P_j(x) y^{(3-j)} + Q(x)y \ , \qquad 0 \le x < \infty \tag{1}$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y''(0) - ay'(0) = 0 \tag{2}$$

$$y'''(0) - by(0) = 0 \tag{3}$$

sınır koşulları ile oluşturulan operatörü L ile gösterelim. Burada a,b reel sayılar, Q(x) ve $P_j(x)$ (j=1,2) H da dönüşüm yapan operatörler olmak üzere aşağıdaki koşulları sağladıklarını varsayalım:

1) Q(x); $Q^*(x) = Q(x) \ge I$ (I, H da birim operatör), her x $\in [0,\infty)$ iken $Q^{-1}(x) \in \sigma_\infty$

(σ_∞ - H da kompakt operatörler uzayıdır)

2) $|x-\xi| \le 1$ olduğunda

$$\left\| [Q(\xi) - Q(x)]\, Q^{-\beta}(x) \right\| \le c\,|x-\xi| \qquad \left(c > 0, \text{sbt} \quad \text{ve} \quad 0 < \beta < \frac{5}{4} \right)$$

3) $|x-\xi| > 1$ olduğunda

$$\left\| \, Q(\xi)\ e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}|x-\xi| Q^{\frac{1}{4}}(x)} \, \right\| \le d \qquad (d = \text{sbt})$$

4) $\left\| \, P_j(x) Q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}(x) \, \right\| < c$ (j=1,2; c = sbt.>0, $\varepsilon > 0$).

Bu koşulların yanısıra L operatörünün $L_2(0,\infty;H)$ Hilbert uzayında $L^* = L \ge I_1$ olduğu varsayılmaktadır. (Burada I_1, $L_2(0,\infty;H)$ da birim operatördür).

2. L OPERATÖRÜNÜN GREEN FONKSİYONU

L operatörünün Green fonksiyonu $G_1(x,\xi;\mu)$ yü ($\mu > 0$)

$$G_1(x,\xi;\mu) = G(x,\xi;\mu) - \int_0^\infty G(x,\xi;\mu)\ \rho(\xi,\eta)\ d\xi \tag{4}$$

integral denkleminin çözümü şeklinde arayalım. Burada $G(x,\xi;\mu)$ terimi $P_j(x) = 0 \quad (j = 1,2)$ olması halinde

$$y^{IV} + Q(x)y + \mu y \qquad , \qquad 0 < x < \infty \tag{5}$$

diferansiyel ifadesi ve (2)-(3) sınır koşulları ile oluşturulan L_1 operatörünün Green fonksiyonu [2], $\rho(\xi,\eta)$ ise bulunması gereken operatör değerli fonksiyondur.

$G_1(x,\xi;\mu)$ (1)-(3) sınır değer problemi ile oluşturulan L operatörünün Green fonksiyonu olduğundan

$$y^{IV} + \sum_{j=1}^{2} P_j(x) y^{(3-j)} + Q(x)y + \mu y = 0 \tag{6}$$

diferansiyel denklemini sağlamalıdır ($x \ne \eta$) :

$$[G_1(x,\xi;\mu)]^{IV} + \sum_{j=1}^{2} P_j(x)[G_1(x,\xi;\mu)]^{(3-j)} + Q(x)[G_1(x,\xi;\mu)] + \mu[G_1(x,\xi;\mu)] = 0 \tag{7}$$

(7) denkleminde $G(x,\xi;\mu)$ teriminin $P_j(x) = 0$ $(j = 1,2)$ olması halinde (5) diferansiyel ifadesi ile oluşturulan denklemi sağladığını ve $\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}$ ün $x = \xi$ noktasında sıçrayışa sahip olduğunu gözönüne alırsak [2] , $\eta \neq x$ iken $\rho(\xi,\eta)$ ya göre aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\rho(x,\eta) + \sum_{j=1}^{2} P_j(x) \frac{\partial^{3-j}}{\partial x^{3-j}} G(x,\eta;\mu) - \sum_{j=1}^{2} P_j(x) \int_0^{\infty} \frac{\partial^{3-j}}{\partial x^{3-j}} G(x,\eta;\mu)\ \rho(\xi,\eta)\ d\xi = 0 \tag{8}$$

Bu son denklemde $P_j(x)$ $(j = 1,2)$ kapalı operatör ve integral altındaki ifade sınırlı operatör olduğundan $P_j(x)$ $(j = 1,2)$ integral altında yazılabilir. O halde

$$\sum_{j=1}^{2} P_j(x) \frac{\partial^{3-j}}{\partial x^{3-j}} G(x,\eta;\mu) = -K(x,\eta;\mu) \tag{9}$$

olarak alınırsa; (8) denklemi

$$\rho(x,\eta) = K(x,\xi;\mu) - \int_0^{\infty} K(x,\xi;\mu)\ \rho(\xi,\eta)\ d\xi \tag{10}$$

şeklini alır.

(10) denklemini $0 \leq x$, $\eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış, değerleri H da dönüşüm yapan, sınırlı ve normu aşağıdaki şekilde tanımlanan $A(x,\eta)$ operatörler kümesi olan $X_3^{(2)}$ uzayında göz önüne alalım.

$$\|A(x,\eta\|_{X_3^{(2)}} = \left(\sup_{0<x<\infty} \int_0^{\infty} \|A(x,\eta\|^2\ d\eta \right)^{1/2} .$$

(10) integral denkleminde ikinci terimin oluşturduğu operatörü N ile gösterirsek yani

$$N\rho = \int_0^{\infty} K(x,\xi;\mu)\ \rho(\xi,\eta)\ d\xi \tag{11}$$

olarak alınırsa (10) denklemi

$$\rho(x,\xi) = K - N\rho \tag{12}$$

şeklinde ifade edilir.

Q(x) operatör fonksiyonu [2] çalışmasında verildiği şekilde yukarıdaki 2) ve 3) koşulları sağladığında $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde N operatörü büzen operatör olacaktır. O halde $x \neq \eta$ ve $\mu \to \infty$ iken

$$\frac{\partial^{3-j}}{\partial x^{3-j}} G \sim \frac{-[Q(x)+\mu I]^{\frac{-j}{4}}}{4} \left\{ (i\alpha_1)^{3-j} e^{i\alpha_1 [Q(x)+\mu I]^{\frac{1}{4}} |x-\eta|} + \right.$$
$$\left. + (i\alpha_2)^{4-j} e^{i\alpha_2 [Q(x)+\mu I]^{\frac{1}{4}} |x-\eta|} \right\} \operatorname{sign}(x-\eta) \tag{13}$$

olduğu görülür. Burada α_1 ve α_2 sayıları $\sqrt[4]{-1}$ in üst yarı düzlemdeki kökleridir.

(13) denklemini ve $P_j(x)$ $(j = 1,2)$ üzerine konulan $\| P_j(x) Q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}(x) \| < c$

(c = sbt , $\varepsilon > 0$) koşulunu göz önüne almak suretiyle $K(x,\eta;\mu)$ nün normunu hesaplayalım;

$$K(x,\eta;\mu) = -\sum_{j=1}^{2} P_j(x)\,\frac{\partial^{3-j}}{\partial x^{3-j}} G(x,\eta;\mu)$$

olarak aldığımızdan

$$\|K(x,\eta;\mu)\|_H \le C\left\|\sum_{j=1}^{2} P_j(x)\frac{-[Q(x)+\mu I]^{\frac{-j}{4}}}{4}\left\{(i\alpha_1)^{3-j} e^{i\alpha_1[Q(x)+\mu I]^{\frac14}|x-\eta|} + (i\alpha_2)^{3-j} e^{i\alpha_2[Q(x)+\mu I]^{\frac14}|x-\eta|}\right\}\right\|$$

$$= C\left\|\sum_{j=1}^{2} P_j(x)\,[Q(x)+\mu I]^{\frac{-j}{4}+\varepsilon}\,[Q(x)+\mu I]^{-\varepsilon}\left\{(i\alpha_1)^{3-j} e^{i\alpha_1[Q(x)+\mu I]^{\frac14}|x-\eta|} + (i\alpha_2)^{3-j} e^{i\alpha_2[Q(x)+\mu I]^{\frac14}|x-\eta|}\right\}\right\|$$

$$\le C\left\{\left\|\int_1^{\infty}(\lambda+\mu)^{-\varepsilon} e^{i\alpha_1(\lambda+\mu)^{\frac14}|x-\eta|}dE_\lambda\right\| + \left\|\int_1^{\infty}(\lambda+\mu)^{-\varepsilon} e^{i\alpha_2(\lambda+\mu)^{\frac14}|x-\eta|}dE_\lambda\right\|\right\}$$

$$\le C\mu^{-\varepsilon} e^{-\mathrm{Im}\,\alpha_1|x-\eta|}$$

Burada E_λ, $Q(x)$ operatörünün spektral fonksiyonudur. En son eşitsizliği η $(0 \le \eta < \infty)$ ya göre integre edersek

$$\int_0^{\infty}\|K(x,\eta;\mu)\|_H^2\, d\eta \le \frac{C^2}{\mu^{2\varepsilon}}\int_0^{\infty} e^{-2\mathrm{Im}\,\alpha_1|x-\eta|}d\eta$$

$$\le \frac{C^2}{\mu^{2\varepsilon}}\left(\int_0^{x} e^{-2\mathrm{Im}\,\alpha_1|x-\eta|}d\eta + \int_x^{\infty} e^{-2\mathrm{Im}\,\alpha_1|x-\eta|}d\eta\right)$$

$$\le \frac{C}{\mu^{2\varepsilon}} \quad ,$$

$$\|K(x,\eta;\mu)\|_{X_3^{(2)}} = \sup_{0\le x<\infty}\left(\int_0^{\infty}\|K(x,\eta;\mu)\|_H^2\, d\eta\right)^{1/2} \le \frac{C}{\mu^{\varepsilon}}$$

olarak elde edilir.Bu ise $K(x,\eta;\mu)\in X_3^{(2)}$ olduğunu ve $\mu\to\infty$ iken $K(x,\eta;\mu)$ nün $X_3^{(2)}$ de normunun sıfıra yaklaştığı görülür. Buna göre μ nün büyük değerlerinde (10) denklemi $X_3^{(2)}$ uzayına ait tek $\rho(x,\eta)$ çözümüne sahiptir. (4) ifadesindeki integral operatör $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde büzen olduğundan dolayı $\mu\to\infty$ iken

$$G_1(x,\eta;\mu) = G(x,\eta;\mu)[1+o(1)] \tag{14}$$

dir. Burada o (1) operatör değerli bir fonksiyondur ve $\mu\to\infty$ iken $\|o(1)\|\to 0$ dır. O halde $G(x,\eta;\mu)$ H – S tipli operatör olduğundan $G_1(x,\eta;\mu)$ de H – S tiplidir yani

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\|G_1(x,\eta;\mu)\|_{H-S}^2\, dx\, d\eta < \infty$$

dur. Şu halde (1) – (3) sınır değer problemine karşılık gelen L operatörünün spektrumu sadece özdeğerlerden ibarettir yani spektrum saf ayrıktır. L operatörünün özdeğerlerini

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots$$

ve bunlara karşılık gelen ortonormalize edilmiş özfonksiyonlarını,

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$$

ile gösterelim.

3. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ SAYISI N (λ) NIN ASİMTOTİK İFADESİ

$\lambda > 0$ herhangi bir sayı olsun. $N(\lambda)$ ile λ yı aşmayan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ özdeğerlerinin sayısını gösterelim:

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \; .$$

$$L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

$$\Rightarrow \; L\varphi_n + \mu\varphi_n = \lambda_n\varphi_n + \mu\varphi_n$$

$$\Rightarrow \; (L+\mu)\varphi_n = (\lambda_n + \mu)\varphi_n$$

olur. L operatörünün spektrumu sadece özdeğerelerden oluştuğuna göre (L + μ) nün tersi vardır. O halde

$$\Rightarrow \varphi_n(x) = (\lambda_n + \mu)(L+\mu)^{-1}\varphi_n$$

$$\Rightarrow \varphi_n(x) = (\lambda_n + \mu)\int_0^\infty G_1(x,\xi;\mu)\varphi_n(\xi)\; d\xi \tag{15}$$

şeklinde yazılabilir

(13) ve (14) den $\mu \to \infty$ iken

$$G_1(x,\eta;\mu) = K(x,\eta;\mu)[1 + o(1)] \tag{16}$$

elde edilir ki burada

$$K(x,\eta;\mu) = \frac{[Q(x)+\mu I]^{-\frac{3}{4}}}{4i}\left[\alpha_1 e^{i\alpha_1[Q(x)+\mu I]^{\frac{1}{4}}|x-\eta|} + \alpha_2 e^{i\alpha_2[Q(x)+\mu I]^{\frac{1}{4}}|x-\eta|}\right][1+o(1)] \tag{17}$$

dir.

$\mu \to \infty$ iken (16) da (17) gözönüne alınırsa (15) eşitliği

$$\varphi_n \sim (\lambda_n + \mu)\int_0^\infty K(x,\xi;\mu)\varphi_n(\xi)\; d\xi$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi_n}{(\lambda_n + \mu)} \sim \int_0^\infty K(x,\xi;\mu)\varphi_n(\xi)\; d\xi$$

şeklini alır. N herhangi doğal sayı olmak üzere,

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\|\varphi_n(x)\|^2}{(\lambda_n + \mu)^2}$$

olsun. O halde

$$\int_0^\infty S_N(x)\; dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{\int_0^\infty \|\varphi_n(x)\|^2 \; dx}{(\lambda_n + \mu)^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2}$$

dir ki burada [1] gibi benzer işlemler yapıldığında

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} \sim \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{[\omega_j(x) + \mu]^{7/4}} \tag{18}$$

olur. Burada $\omega_1(x) \le \omega_2(x) \le \cdots$ Q(x) operatörünün özdeğerleridir. [4] çalışmasında elde edilen

$$\int_0^{\infty} \frac{N(\lambda)}{(\lambda+\mu)^3} d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}$$

formülünü kullanırsak (18) ifadesinden

$$\int_0^{\infty} \frac{N(\lambda)}{(\lambda+\mu)^3} d\lambda \sim \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{[\omega_j(x)+\mu]^{7/4}}$$

yazılabilir. Keyfi $t > 0$ için

$$\frac{c_1}{t^{7/4}} \sum_j \int_{\omega_j(x)\le t} dt \le \sum_j \int_{\omega_j(x)\ge t} \frac{dx}{[\omega_j(x)+\mu]^{7/4}} \le \frac{c_2}{t^{7/4}} \sum_j \int_{\omega_j(x)\le t} dt \qquad (19)$$

olacak şekilde c_1, c_2 sabitlerinin olduğunu farzedelim. Bu koşul kullanılarak [3] çalışmasında olduğu gibi Titchmarsh ın [4] Tauber tipli teoreminden $\lambda \to \infty$ iken

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_j \int_{\omega_j(x)<\lambda} [\lambda - \omega_j(x)]^{1/4} dx$$

olarak L operatörünün özdeğerler sayısı $N(\lambda)$ nın asimtotik ifadesi elde edilmiş olur.

4. SONUÇ

Operatör katsayılı diferansiyel denklemlerin spektrumunun asimtotik ifadesinin bulunması matematiğin iç problemi olmasının yanı sıra fizikte ters saçılma probleminin çözülmesinde büyük önem taşımaktadır.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar kuvantum fiziği problemlerinin çözümünde faydalı olabilir.

KAYNAKLAR

[1] Bayramoğlu, M., Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı, Fonksiyonel Analiz ve Uygulamaları, Sbornik Bakü: Bilim, 144-166, 1971.

[2] Bayramoğlu, M. and Kızılbudak, S., On the Green Function of Fourth Order Differential Equation with Two Term Given in Semi-axis, International Mathematical Journal, Japan, Vol. 3, no. 11, 1177-1192, 2003.

[3] Kostyuçenko, A.G. and Levitan, B.M., Sturm-Liouville Operatör Denkleminin Özdeğerlerinin Asimtotik Davranışı, Funks. Analiz, ego pril., Vip.I, 86-96, 1967.

[4] Titchmarsh, E.C., Eigenfunctions Expansions Associated with Second Order Differential Equations, 2nd ed., Vol. II, Oxford Univ. Press, London.