

KALIN CİDARLI BORULARA SINIR ELEMAN VE SONLU ELEMAN METODLARININ UYGULANMASI

M. Cüneyt FETVACI*, C. Erdem İMRAK, Koray KESİKÇİ

İstanbul Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Gümüşsuyu-İSTANBUL

Geliş/Received: 08.10.2003 Kabul/Accepted: 21.04.2004

APPLICATION OF BOUNDARY ELEMENT AND FINITE ELEMENT METHODS TO THE THICK WALLED CYLINDRICAL PIPES

ABSTRACT

Numerical methods are extensively used to solve engineering problems adequately. Due to the developments in computer technology, commercial software enables to use numerical methods impressively. In this study boundary elements and finite elements, widely used numerical methods in engineering, are studied. The modeling steps and the application procedures of both methods to pressurized thick-walled cylindrical pipes are examined and results are compared.

Keywords: Thick walled cylindrical pipe, boundary element method, finite element method.

ÖZET

Mühendislik problemlerinin tatminkar olarak çözülmesinde sayısal metotlar yaygın olarak kullanılmaktadır. Bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere bağlı olarak geliştirilen paket programlar sayısal metotların etkin kullanımını sağlamaktadır. Bu çalışmada yaygın kullanılan sayısal metotlardan sınır elemanlar ve sonlu elemanlar metotları ele alınmıştır. Her iki metodun modelleme adımları ve içten basınçlandırılmış kalın cidarlı boru problemine uygulanması ele alınmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anhatar Sözcükler: Kalın cidarlı boru, sınır eleman metodu, sonlu eleman metodu.

1. GİRİŞ

Bilgisayar teknolojisinde yazılım ve donanım bakımından hızlı gelişmeler sayısal metotların mühendislik problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılmasını sağlamıştır. Analitik olarak çözülemeyen ve deneysel yönden çok tekrar gerektiren problemlerin modellenmesinde tercih edilen bu yöntemler, kullanıcı dostu paket programların uygun maliyetle elde edilebilmesiyle her disiplinden mühendislik problemlerinin incelenmesinde tercih edilmektedir [1,2].

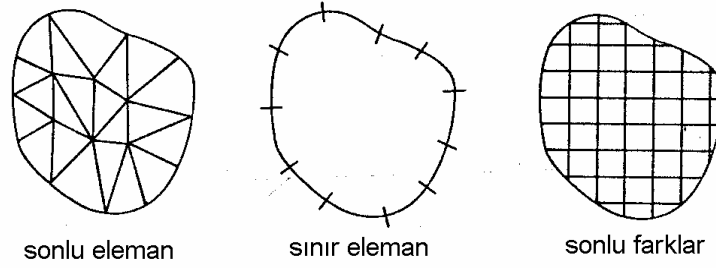
Sonlu farklar (FDM), sonlu elemanlar (FEM) ve sınır eleman (BEM) metodları mühendislik problemlerinin analizinde kullanılmaktadır. Bu metodlarla düzlemsel problem geometrisinin modellenmesi Şekil 1’de gösterilmiştir.

Sonlu elemanlar yönteminin yetersiz kaldığı veya bilgisayar destekli mühendislik sistemlerinin çözmekte zorlandığı uygulamalarda yeni bir metoda gereksinim duyulduğundan ve incelenen parça ile alandaki ağlarının tanımlanmasında göreceli olarak yavaş işlem yaptığından sınır elemanlar metodu, daha güçlü bir alternatif olarak ortaya çıkmıştır. Sınır elemanlar

* Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-mail: fetvacic@itu.edu.tr ; tel: (0212) 293 13 00 / 2470

Kalın Cidarlı Borulara Sınır Eleman ve Sonlu...

metodunun en önemli üstünlükleri ise, tüm hacim yerine sadece yüzeyin göz önüne alınmasının yeterliliği ve daha basit ağ yapıları kullanılması, tasarım değişiklikleri sonucu, ağı yeniden yapılandırılmasını gerektirmemesidir [3].



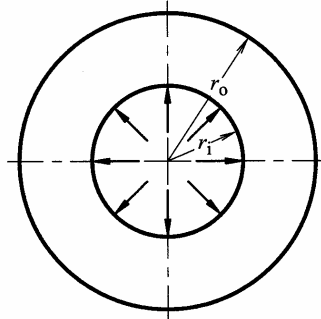
Şekil 1. Sayısal metotlarla problemin modellenmesi

Bu çalışmada sınır eleman ve sonlu eleman metotlarının genel özellikleri ve modellemede takip edilen adımlar ele alınmıştır. Metotların özellikleri karşılaştırılmıştır. Temel bir uygulama olarak içten basınçlandırılmış kalın cidarlı silindirik boru problemi ele alınmıştır. Problemin sonlu elemanlar metoduyla analizi için ANSYS® paket programı, sınır elemanlar metoduyla analiz için ise BEASY® paket programı kullanılmıştır.

2. İÇTEN BASINÇLANDIRILMIŞ KALIN CİDARLI BORU

Kalın cidarlı içten basınçlandırılmış boru problemi ile metodların modelleme ve çözümlemedeki özellikleri karşılaştırılmıştır. Problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır [1,3,4]. Kalın cidarlı boru malzemesi olarak homojen ve isotropik yapıya sahip olduğu kabul edilen alüminyum seçilmiştir. Buna göre malzeme sabitleri olan poisson oranı $\nu=0,32$ ve elastisite modülü $E=730000$ MPa dır [4].

İçten 100 MPa basınçla basınçlandırılmış kalın cidarlı boruda oluşan teğetsel gerilmeleri veren genel ifade, geometri ve boyutları Şekil 2'de gösterildiği gibi r_o dış çap, r_i iç çap ve R herhangi bir çap olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir [5].



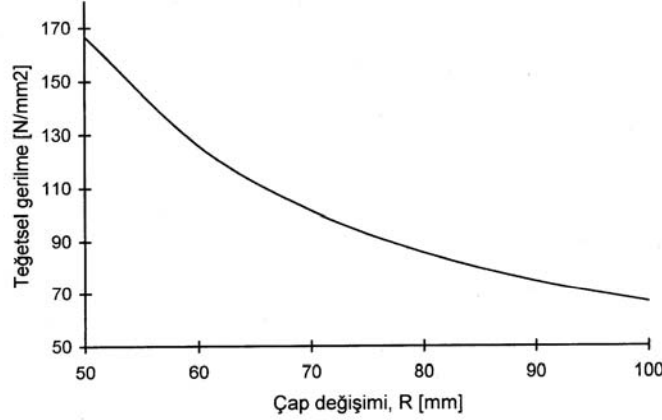
Şekil 2. İçten basınçlandırılmış kalın cidarlı boru geometrisi [4]

$$\sigma_t = \frac{P}{\beta^2 - 1} \left(1 + \frac{r_0^2}{R^2} \right) \quad (1)$$

Burada dış çapın iç çapa oranı $\beta (=r_0 / r_i)$ ile tanımlanmıştır. Buna göre iç çap ve dış çapta meydana gelen teğetsel gerilmeler (1) ifadesinden elde edilir.

$$\sigma_t \Big|_{R=r_i} = \frac{P(\beta^2 + 1)}{\beta^2 - 1} \quad \text{ve} \quad \sigma_t \Big|_{R=r_0} = \frac{2P}{\beta^2 - 1} \quad (2)$$

İçten basınçlandırılmış kalın cidarlı boruda oluşan teğetsel gerilmelerin değişimi, iç çap 50 mm'den dış çap 100 mm'ye kadar hesaplanmış ve Şekil 3'de gösterilmiştir.



Şekil 3. Kalın cidarlı borudaki teğetsel gerilmeler

Kalın cidarlı boruda herhangi bir çaptaki radyal gerilmeleri veren genel ifade aşağıda yazılmıştır.

$$\sigma_r = \frac{P}{\beta^2 - 1} \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right) \quad (3)$$

Burada, P iç basıncı, dış çapın iç çapa oranı $\beta (=r_0 / r_i)$ ile tanımlanmıştır. Buna göre iç çap ve dış çapta meydana gelen radyal gerilmeler (3) ifadesinden elde edilir.

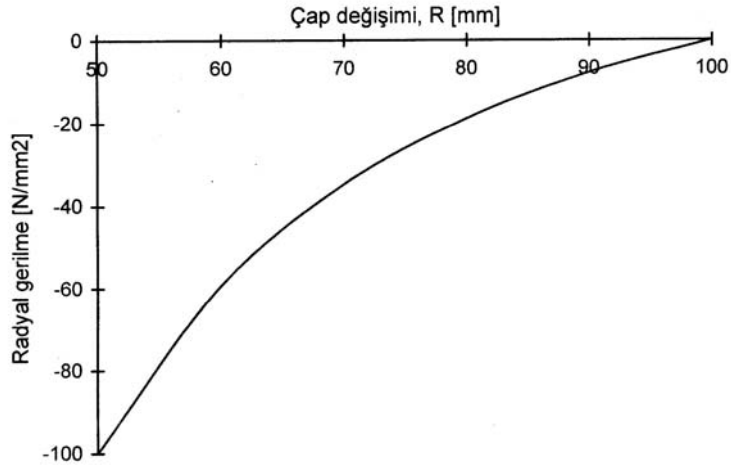
$$\sigma_r \Big|_{R=r_i} = -P \quad \text{ve} \quad \sigma_r \Big|_{R=r_0} = 0 \quad (4)$$

İçten basınçlandırılmış kalın cidarlı boruda oluşan radyal gerilmelerin değişimi, 50 mm'den 100 mm'ye kadar değişimi hesaplanmış ve Şekil 4'de gösterilmiştir.

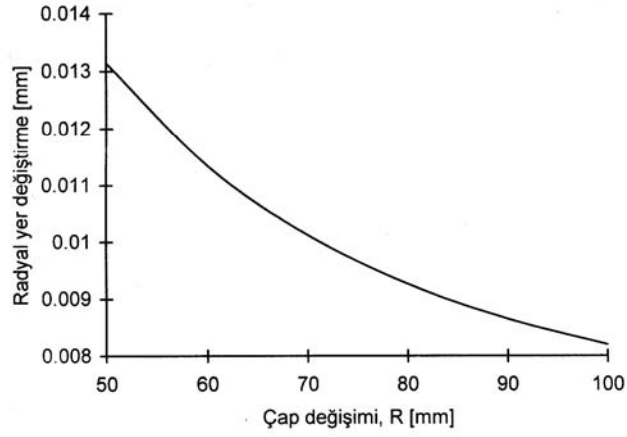
Kalın cidarlı borunun herhangi bir çapında meydana gelen radyal doğrultudaki yer değiştirme ise

$$U_R = \frac{PR}{E(\beta^2 - 1)} \left((1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{r_0^2}{R^2} \right) \quad (5)$$

olarak ifade edilir ve radyal doğrultudaki yer değiştirme miktarları, R çap değeri iç çap olan 50 mm'den dış çap olan 100 mm'ye kadar hesaplanmış ve Şekil 5'de gösterilmiştir.



Şekil 4. Kalın cidarlı borudaki radyal gerilmeler

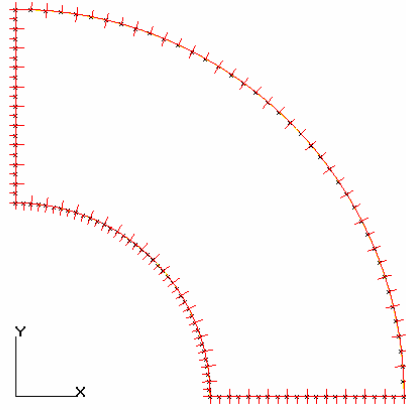


Şekil 5. Analitik çözümden elde edilen radyal yer değiştirme

3. PROBLEMİN SINIR ELEMANLAR METODU İLE ANALİZİ

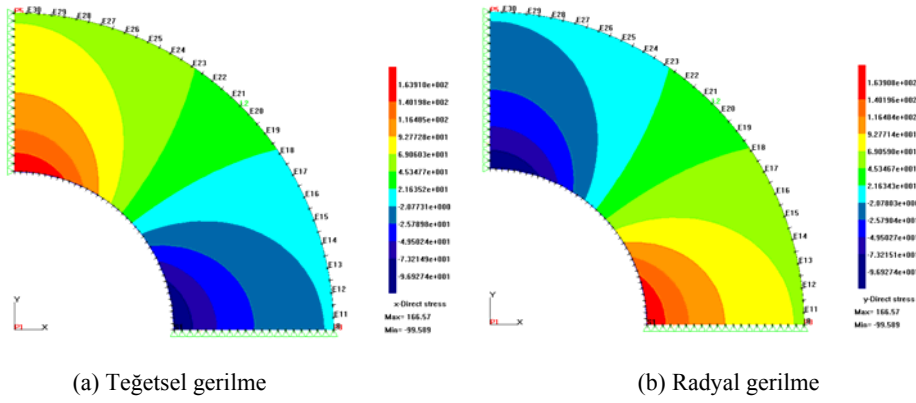
Sınır eleman metodunda modelin elemanlara ayrılması sadece sınırlarda gerçekleşmekte ve karmaşık geometri kolaylıkla modellenmektedir. Gerilme ve yerdeğiştirme gibi değişkenlerin hızlı değiştiği bölgelerin modellenmesi sonlu elemanlar metoduna göre hassas bir şekilde gerçekleşmektedir [1,6].

Kalın cidarlı borunun sınır eleman modeli Şekil 6'da gösterilmiştir. Sınır eleman modeli 60 adet sabit dereceden elemanla tesis edilmiştir. Yüzeydeki noktalar dahil olmak üzere 6 noktada gerilme ve yerdeğiştirme değerleri hesaplanmıştır.



Şekil 6. Kalın cidarlı borunun sınır eleman modeli

BEASY® paket programı kullanılarak sınır eleman modeli yaratılan kalın cidarlı boru, içten 100 MPa basınçla basınçlandırılmış ve cidarda oluşan teğetsel ve radyal gerilme dağılımı Şekil 7'de görüldüğü gibi elde edilmiştir [7].



(a) Teğetsel gerilme

(b) Radyal gerilme

Şekil 7. Sınır elemanlar metoduyla elde edilen gerilmeler

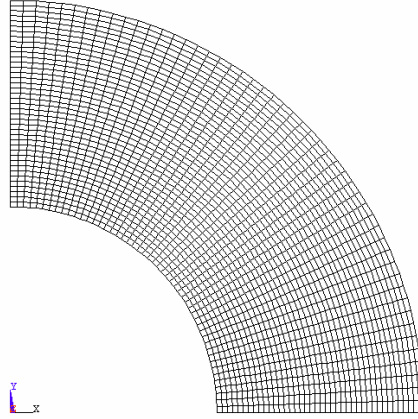
4. PROBLEMİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ANALİZİ

Ele alınan bir problemin sonlu elemanlar metodu ile modellenmesi, çözümlenmesi ve çözüm sonuçlarının değerlendirilmesi paket programlarda üç ayrı modüle gerçekleştirilmektedir. Analizde modele sınır şartlarının tatbik edilmesine kadar olan işlemler programın ön-işlemci modülünde, modelin çözümlenmesi çözümleyici modülünde ve ek hesaplamalar ile sonuçların sayısal veya görsel değerlendirilmesi işlemleri ise son-işlemci modülünde gerçekleştirilmektedir. Geometrik modelin kenarlarına eleman sayısı ve dağılımını belirleyen parametreler tatbik edilerek problemin sonlu eleman modeli, 8-düğüm noktalı eşparametrik dörtgen eleman (PLANE82) kullanılarak elde edilmektedir [8-10].

Kalın cidarlı boru problemi iki boyutlu gerilme problemi olarak ele alınmış, geometri ve yükleme şartlarındaki düzlemsel simetri nedeniyle, bütünü karakterize eden 1/4 formunda

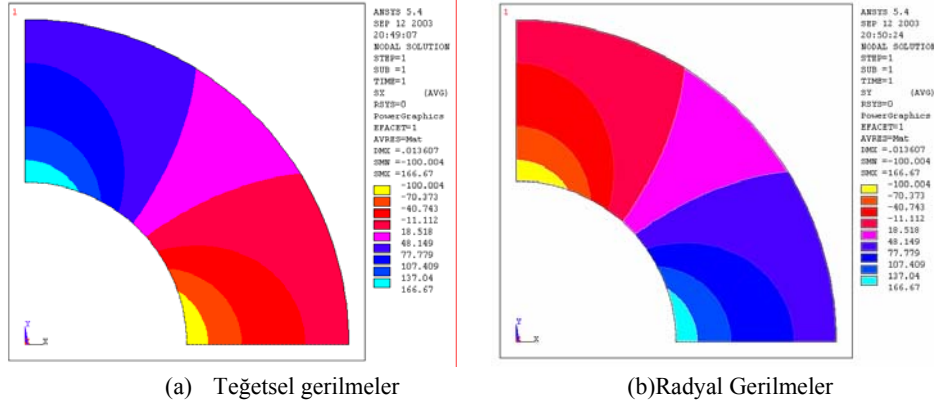
Kalın Cidarlı Borulara Sınır Eleman ve Sonlu...

radyal doğrultuda 40, teğetsel doğrultuda 50 olmak üzere toplam 2000 adet ikinci dereceden eleman ile Şekil 8’de görüldüğü gibi oluşturulmuştur [9,11,12].



Şekil 8. Kalın cidarlı borunun sonlu elemanlar modeli

Eleman yoğunluğu gerilmenin yüksek olması beklenen iç bölgede yüksek tutulmuş ve dış çapa doğru tedrici olarak azaltılmıştır. Sonlu elemanlar metodu kullanılarak analizi yapılan kalın cidarlı borunun teğetsel ve radyal gerilme dağılımları Şekil 9’da görülmektedir.



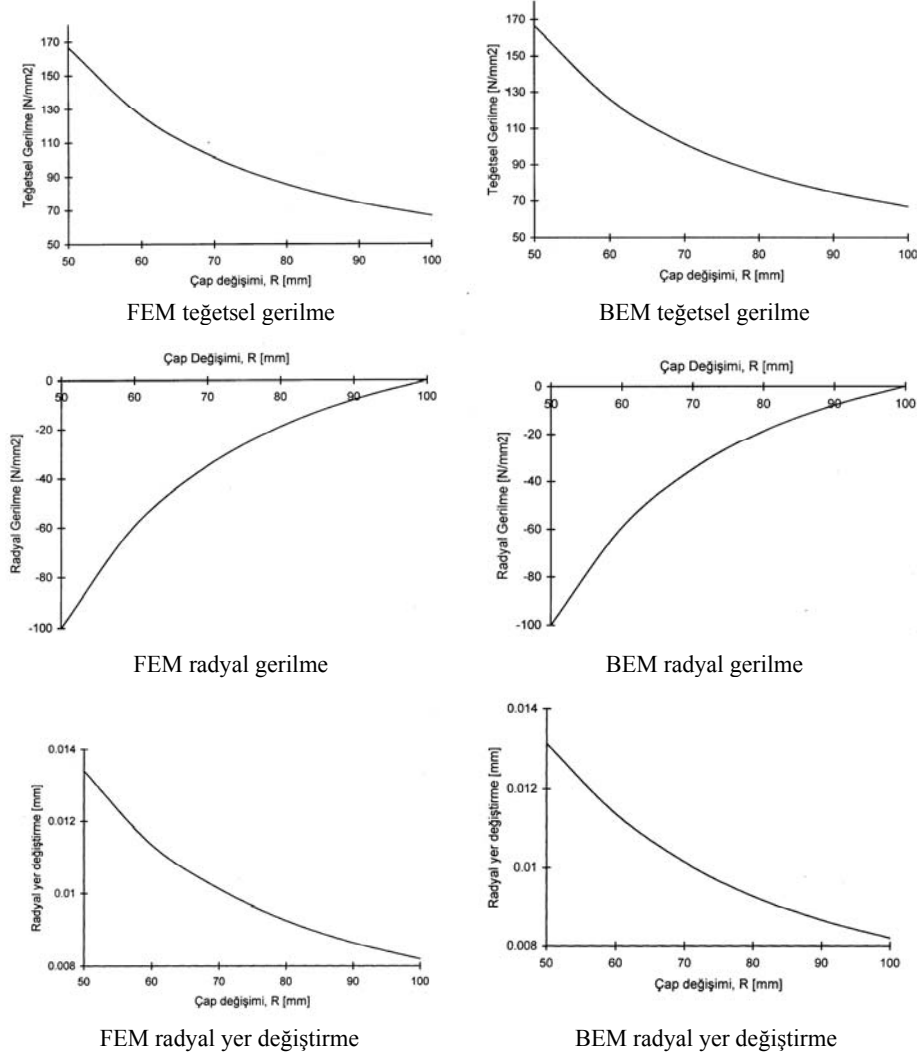
Şekil 9. Kalın cidarlı boruda oluşan gerilme dağılımı

5. ÇÖZÜMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Kalın cidarlı boru probleminde teğetsel ve radyal gerilmelerin değişimi ile x eksenini boyunca yer değiştirmeler, sınır elemanlar (BEM) ve sonlu elemanlar (FEM) metodlarında ayrı ayrı elde edilmiş ve Şekil 10’da gösterimiştir [9,13].

Sonlu elemanlar yönteminde tüm alanın ağ ile ayrıştırılması gerekirken, sınır elemanlar yönteminde ağ ile ayrıştırılması gereken sadece yüzeydir. Böylece ağ sayısındaki azalmadan dolayı, problemin derecesi bir derece azalmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde genel çözümün

bir parçası olarak tüm alanın çözümü hesaplanmakta, ancak sınır elemanlar yönteminde öncelikle sınırın çözümü yapılmakta, gerekiyorsa alan içindeki noktaların çözümü bağımsız bir adım olarak gerçekleştirilmektedir. Böylece, analiz yapılacak detaylar sınırda veya alan içerisinde belli bir bölgede olduğundan tüm alanın analizine gerek kalmamaktadır.



Şekil 10. Sınır eleman ve sonlu eleman metoduyla elde edilen değerler

Bu çalışmada ele alınan problemin sonlu eleman modellenmesinde 2000 adet eleman kullanılmış, sınır eleman modelinde ise sadece 60 adet eleman kullanılmıştır. Analiz neticesinde aynı seviyedeki doğruluk için sınır eleman metodunda daha az sayıda eleman kullanıldığı görülmektedir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada analitik çözümü bilinen bir problem ele alınmış ve analitik çözüm ile sonlu eleman ve sınır eleman çözümünün karşılaştırılması yapılmıştır. Sayısal metodlar mühendislik problemlerinin analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Gerilme analizinde sonlu eleman ve sınır eleman metodları yaygın olarak kullanılmaktadır. Çalışmada bu metodların özellikleri karşılaştırılarak verilmiştir. Örnek problemin incelenmesinde sınır eleman metodunun aynı seviyedeki bir doğruluk için daha az sayıda elemanla sonlu eleman metoduna göre avantaj sağladığı görülmektedir. Ayrıca sınır eleman metodunda problem sadece sınırlarda modellendiğinden veri hazırlama ve hesaplama maliyeti açısından sonlu eleman metoduna göre tercih edilmesini sağlamaktadır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmaya 1943 no'lu proje ile destek veren İTÜ. Araştırma Fonu teşekkürle anılır.

REFERANSLAR

- [1] Becker, A.A., "The Boundary Element Method in Engineering", McGraw-Hill Publ., Cambridge, 1992.
- [2] Hsu, T., Sinha, D.K., "Computer Aided Design: An Integrated Approach", West Publishing Company, St. Paul, 1992.
- [3] Brebbia, C.A., Dominguez, J., "Boundary Elements: An Introductory Course", McGraw Hill Publ., London, 1992.
- [4] Aliabadi, M.H., "The Boundary Element Method : Applications in Solids and Structures", Wiley, West Sussex, 2002.
- [5] Krishnamachari, S.I., "Applied Stress Analysis of Plastics: A Mechanical Engineering Approach", Von Nostrand Reinhold, New York, 1993.
- [6] Çelik, M., "Sınır Eleman Yaklaşımı ve Sonlu eleman ile Karşılaştırılması", Kara Harp Okulu Bilim Dergisi, 8, 1, 83-97, 1998.
- [7] Brebbia, C.A., "BEASY : A Boundary Element System of Structural Analysis Systems", Pergamon Press, Oxford, 1986.
- [8] Moaveni, S., "Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS", Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [9] Fetvacı, M.C., "Sonlu Elemanlar Metodu ile Gerilme Analizi: Kalın Cidarlı Silindirik Borulara Uygulama", Mühendis ve Makina, 43, 508, 42-46, 2002.
- [10] Fagan, M.J., "Finite Element Analysis", Longman Scientific and Technical, England, 1992.
- [11] Budynas, R.G., "Advanced Strength and Applied Stress Analysis", McGraw-Hill, Singapore, 1999.
- [12] N.N., "ANSYS User's Manual for Revision 5.0", Swanson Analysis System Inc., Houston, 1992.
- [13] İmrak, C.E., Fetvacı, M.C., "Sınır Eleman ve Sonlu Eleman Metodlarının Karşılaştırılması", II. Makina Tasarım ve İmalat Teknolojileri Kongresi Bildiri Kitabı, 26-27 Eylül 2003, Konya, 217-224.