

**GENELLEŞTİRİLMİŞ TANIMLAMA FONKSİYONU SERİLERİ METODU İLE DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN FREKANS BOYUTUNDA ANALİZİ**

**İlyas ÇANKAYA\*, James C. Peyton JONES\*\*, Fahri VATANSEVER\***

\*Sakarya Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Elektronik-Bilgisayar Eğitimi Bölümü, SAKARYA  
\*\*Villanova University, Department of Electrical & Computer Engineering, 800 Lancaster Ave, Villanova, PA 19085, USA

Geliş Tarihi: 14.11.2002

**ANALYSING NONLINEAR SYSTEMS IN THE FREQUENCY DOMAIN USING GENERALISED DESCRIBING FUNCTION SERIES METHOD**

**ABSTRACT**

In this study, Generalised Describing Function series method was presented and application to Duffing's equation, which is as an example model of many electrical, electrical or mechanical system, was discussed with simulation results.

**ÖZET**

Bu çalışmada, Genelleştirilmiş Tanımlama Fonksiyonu serileri metodu matematikte Duffing denklemi olarak bilinen fakat birçok elektroniksel, elektriksel veya mekaniksel sistemin karşılığı olan örnek bir model üzerinde simülasyon sonuçları ile birlikte sunulmuştur.

**1. GİRİŞ**

Harmonikler, atlama rezonansı gibi davranışlar frekans boyutunda daha iyi tanımlanabildiğinden frekans boyutunu temel alan yaklaşımları kullanmak, birçok araştırmacı yazar tarafından kullanılan sarsım metotları (perturbation methods), harmonik denge metodu (harmonic balance method) gibi çoğu zaman boyutundaki metotlardan çok daha uygundur [1-4]. Genel olarak doğrusal olmayan frekans boyutundaki sunumlar Volterra modelini temel alır [5-9]. Bu oldukça geneldir, fakat çok boyutlu formlarda dezavantaja sahiptir [10]. Buna alternatif olarak eğer giriş Tanımlama Fonksiyonu modelinde olduğu gibi belirli bir dalga formuyla sınırlandırılırsa problem basitleşebilir. Tanımlama fonksiyonu modelinde frekans cevabı fonksiyonu genliğe bağımlı olduğundan sistem yarı doğrusal olarak temsil edilir [11-12].

Giriş dalga formunun belirli olmasındaki fikir sistemin tanımlama fonksiyonu için Volterra modelindeki çok boyutlu  $n$ 'inci derecedeki transfer fonksiyonlarını tek boyutlu serilerden oluşan cevaba indirgemeye imkan sağlar. Ancak birçok sistem, örneğin geminin sallanma modeli ve Duffing denkleminde olduğu gibi, çıkış sinyalinde doğrusal olmayan bileşenler içerir ve elde edilen cevaplar tanım fonksiyonundaki serilerden (veya gerçekte elde edilen Volterra serileridir) oluşan ifadelerle sonsuz uzunlukta olmaya başlar [13-14]. Bundan dolayı mümkün olan bir uygulamada serinin kesilmesidir. Fakat, o zamanda,  $n$ 'inci terim  $n$ 'inci dereceden homojen olduğundan giriş genliği yükseltildiğinde ihmal edilen yüksek derecedeki terimler artan oranda etkin olmaya başlar ve sonuçta hatalar ortaya çıkar.

## Genelleştirilmiş Tanımlama Fonksiyonu Serileri...

Bu çalışmada, genelleştirilmiş tanımlama fonksiyonu serileri metodu örnek olarak doğrusal sönüm terimi ve doğrusal-kübik setlik terimleri içeren birinci dereceden serbestliğe sahip Duffing denklem modeli üzerinde sunulmuştur. Elde edilen frekans boyutundaki sonuçların doğruluğu sayısal simülasyon yoluyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak ortaya konmuştur.

### 2. ÇOK BOYUTLU VOLTERRA SERİLERİ

Tek girişli analitik bir sistemin çıkışına ait Volterra model sunumu aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$y(t) = \sum_{n=1}^N y_n(t) \quad (1)$$

burada  $y_n(t)$  sistemin  $n$ 'inci dereceden çıkışıdır ve aşağıdaki formülle belirtilir,

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) d\tau_i \quad (2)$$

burada  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $\tau_1, \dots, \tau_n$  'ın gerçek değer fonksiyonudur ve  $n$ 'inci derece *kernel* veya sistemin  $n$ 'inci derece *impuls* cevabı diye adlandırılır. Çünkü  $n=1$  durumu için doğrusal impuls cevabı fonksiyonu haline dönüşür.

1 ve 2 numaralı denklemler Volterra modelinin zaman boyutundaki sunumunu tanımlar. Buna alternatif olarak, Volterra modeli Fourier dönüşümü sayesinde frekans boyutunda belirtilebilir. Ne yazık ki,  $n$ -boyutlu Fourier dönüşümü  $y_n(t)$  eşitliğinin tamamına doğrudan doğruya uygulanamaz, çünkü eşitliğin sol tarafı tek boyutludur (bu durum sadece 2 numaralı denklemde eşitliğin sağ tarafı için uygundur). Genel olarak uygulamada bu problemi ortadan kaldırmak için bir 'birleşik fonksiyon' tanımlanır,

$$y_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) d\tau_i \quad (3)$$

istenen çıkış  $y_n(t)$  aşağıdaki sınırlama sayesinde yeniden elde edilebilir,

$$y_n(t) = y_n(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_1=\dots=t_n=t} \quad (4)$$

Böylece çok boyutlu Fourier dönüşümü herhangi bir zorlukla karşılaşmadan 3 numaralı denklemdeki eşitliğin her iki tarafına uygulanabilir,

$$Y_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = H_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \prod_{i=1}^n U(j\omega_i) \quad (5)$$

burada  $H_n(\cdot)$ ,  $n$ 'inci dereceden Volterra transfer fonksiyonu veya  $n$ 'inci dereceden frekans cevabı fonksiyonu olarak adlandırılır ve aşağıdaki denklemle tanımlanır,

$$H_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_n\tau_n)} d\tau_1, \dots, d\tau_n \quad (6)$$

Dikkat edilirse 6 numaralı denklem  $n=1$  durumu için standart doğrusal transfer fonksiyonu tanımına dönüşür. Gerçekten  $n$ 'inci dereceden Volterra transfer fonksiyonu ve onun Fourier çiftinden oluşan impuls cevabı formu doğrusal durumda olduğu gibidir; bundan dolayı 6 numaralı denklem ilişkisi ters Fourier dönüşümü gibi yazılabilir,

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) e^{j(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_n\tau_n)} d\omega_1, \dots, d\omega_n \quad (7)$$

7 numaralı denklem 2 numaralı eşitlikte yerine yazılır ve  $\tau_1, \dots, \tau_n$  için çoklu integral işlemi yapılırsa,

$$y_n(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \prod_{i=1}^n U(j\omega_i) e^{j(\omega_1 + \dots + \omega_n)t} d\omega_i \quad (8)$$

elde edilir. Burada  $U(j\omega_i)$  giriş spektrumunu temsil eder. 8 numaralı denklemde yer alan üslü terim incelendiğinde  $n$ 'inci dereceden çıkışın  $\omega_{out}$  frekansında bir bileşen içerdiği görülür,

$$\omega_{out} = \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (9)$$

bundan dolayı 9 numaralı denklem eşitliğine uygun olarak herhangi bir uyarma frekansı için aynı çıkış frekansı  $\omega_{out}$  elde edilir. Gerçekten 8 numaralı denklem tek boyutlu çıkış spektrumunun ters Fourier dönüşümü şeklinde ele alınabilir ve aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$Y_n(j\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \prod_{i=1}^n U(j\omega_i) d\omega_1, \dots, d\omega_{n-1} \quad (10)$$

Bu ifade giriş frekansı bileşenlerinin nasıl bir etkileşim ve birleşim içerisinde  $n$ 'inci dereceden çıkış spektrum formunu oluşturduklarını tanımlar. Böylece toplam çıkış spektrumu aşağıda verilen denkleme göre elde edilen her bir derecedeki bileşenlerin toplamıyla ifade edilebilir,

$$Y(j\omega) = \sum_{n=1}^N A^n Y_n(j\omega) \quad (11)$$

Şu halde  $n$ 'inci dereceden transfer fonksiyonu doğrudan doğruya aşağıda verilen ifadede yerine konularak elde edilebilir [15],

$$\begin{aligned} - \left[ \sum_{l_1=-L}^L c_{1,0}(l_1) \left( j \sum_{i=1}^n \omega_i \right)^{l_1} \right] H_n^{asym}(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = \\ \sum_{l_1, l_n=-L}^L c_{0,n}(l_1, \dots, l_n) \prod_{i=1}^n (j\omega_i)^{l_i} \\ + \sum_{q=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-q} \sum_{l_1, l_n=-L}^L c_{p,q}(l_1, \dots, l_{p,q}) \prod_{i=n-q+1}^{p+q} (j\omega_i)^{l_i} H_{n-q,p}(j\omega_1, \dots, j\omega_{n-q}) \\ + \sum_{p=2}^n \sum_{l_1, l_p=-L}^L c_{p,0}(l_1, \dots, l_p) H_{n,p}(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \end{aligned} \quad (12)$$

burada  $H_{n,p}(\cdot)$  ifadesi,

$$H_{n,p}^{asym}(\cdot) = \sum_{i=1}^{n-p+1} H_i^{asym}(j\omega_1, \dots, j\omega_i) H_{n-i,p-1}(j\omega_{i+1}, \dots, j\omega_n) (j\omega_1 + \dots + j\omega_i)^{l_p} \quad (13)$$

ile temsil edilir.

### 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TANIMLAMA FONKSİYONU SERİLERİ

Volterra modelin çok boyutluluğu  $n$  sayıdaki herhangi bir genel, bağımsız, frekans bileşenleri arasındaki etkiyi karakterize eden bir mekanizma olarak ortaya çıkar. Eğer girişin frekans bileşeni herhangi bir yolla tespit edilirse bunların mümkün olan frekans bileşenleri arasındaki tesirlerin tamamı önceden tanımlanır ve sadece giriş genliği geride kalır. Tespit edilmiş dalga formu için aynı frekanstaki giriş ve çıkış bileşenleri aşağıda verilen denklemlerle ifade edilebilir,

$$Y(j\omega) = N(A, j\omega)AU(j\omega) \quad (14)$$

burada bildiğimiz doğrusal transfer fonksiyonu  $H(j\omega)$ 'nın yerine genlik bağımlı "Tanımlama Fonksiyonu"  $N(A, j\omega)$  kullanılmıştır.

## Genelleştirilmiş Tanımlama Fonksiyonu Serileri...

Genellikle doğrusal olmayan sistemlerin giriş uyarımındaki frekanstan oldukça farklı çıkış bileşenleri ürettiği açık olsa da, burada sözü edilen tanımlama fonksiyonu sadece aynı frekanstaki giriş ve çıkış bileşenleri için tanımlanır. Bunun sonucu olarak  $\omega_r$  'deki giriş frekansı bileşeni ve  $\omega_s$  'deki çıkış bileşeni arasındaki bağımlılığın ilişkisi bazen “çapraz spektral tanımlama fonksiyonu”,  $N_{r,s}(\cdot)$ , şeklinde tanımlanarak daha kullanışlı hale gelir,

$$Y(j\omega_s) = N_{r,s}(A, j\omega_r)AU(j\omega_r) \quad (15)$$

Pratikte temel ve üçüncü harmonik arasındaki çapraz spektral oranını temsil eden  $N_{1,3}(\cdot)$  örneğinde kullanıldığı gibi giriş bileşenleri genellikle harmoniklerle alakalı ifadelerdir.

Zaman boyutundaki bir diferansiyel denklem modeli ve verilen bir harmonik giriş için tanımlama fonksiyonunun nasıl hesaplanacağı bir problem olarak ortaya çıkar. Bu problemin çözümündeki ihtimallerden bir tanesi çok genel Volterra modeline göre tanımlama fonksiyonu için seri ifadelerinin çıkarılmasıdır. Bu 15 ve 11 numaralı denklemlerden elde edilebilir, ve tekrar düzenlendiğinde aşağıdaki ifade elde edilir,

$$N_{r,s}(A, j\omega_r) = \sum_{n=1}^N A^{n-1} H_{n,r,s}(j\omega_r) \quad (16)$$

burada  $H_{n,r,s}(j\omega_r)$  aşağıda verilen ifadeye göre tanımlanan  $n$ 'inci dereceden tanımlama fonksiyonunun bileşenidir,

$$H_{n,r,s}(j\omega_r) = \frac{Y_n(j\omega_s)}{U(j\omega_r)} \quad (17)$$

Fiziksel olarak bunların  $n$ 'inci dereceden bileşenlerinin her biri giriş frekansı bileşenleri arasında  $n$  sayıda etkiyle ortaya çıkan tanımlama fonksiyonuna olan yardımcı tanımlar. Bunların tesirleri  $Y_n(j\omega)$  için 10 numaralı denklem vasıtasıyla tanımlanır. Fakat burada göz önünde bulundurulacak girişlerin sınırlandırılmış formları için basitleştirilebilir. Örneğin harmonik girişin  $dc$  bileşeni ile birlikte sinüsoidal sıralı bir küme içerdiğini göz önünde bulunduralım,

$$u(t) = A \left[ \sum_{r=1}^R A_r \cos(\omega_r t + \phi_r) + A_{dc} \right] \quad \omega_i > \omega_j \quad \forall \quad i > j \quad (18)$$

burada  $R$  giriş harmoniklerinin her birine ait genlik,  $A_r$ , ve faz,  $\phi_r$ , değerleri bilinmektedir. Eğer bu giriş Volterra modeline uygulanırsa 5 ve 10 numaralı denklemler arasındaki  $n$ 'inci dereceden çıkış spektrumu için kesin denklem ifadeleri elde edilebilir. Bundan dolayı 18 numaralı denklemin Fourier dönüşümü alındığında uyarım frekanslarına ait denklem kümesi elde edilir,

$$U(j\omega) = A \sum_{r=-R}^R 2\pi \frac{A_r}{2} e^{j\phi_r} \delta(\omega - \omega_r) \quad (19)$$

burada  $\omega_{-r} = -\omega_r$  ve  $\phi_{-r} = -\phi_r$  tanımları sayesinde denklem ifadesi basitleştirilmekte ve  $\omega_0 = 0$  ve  $A_0 = 2A_{dc}$  şeklinde tanımlama yapılarak da  $dc$  polarma bileşeni uygun hale getirilmektedir.

Şu halde giriş spektrumunun çarpımı delta fonksiyonlarının toplamıdır,

$$\prod_{i=1}^n U(j\omega_i) = (2\pi)^n \sum_{r_1, r_n = -R}^R \prod_{i=1}^n \frac{A_{|r_i|}}{2} e^{j\phi_{r_i}} \delta(\omega_i - \omega_{r_i}) \quad (20)$$

böylece çok boyutlu frekans kümesinde yer alan bütün noktalar cevabın içinde tanımlanmış olur. Özellikle 20 numaralı denklemde yer alan delta fonksiyonlarının değerlendirilmesi kolay olduğundan 10 numaralı denkleme integral uygulandığında tek-boyutlu çıkış çok daha kolay elde edilir,

$$\begin{aligned}
Y_n(j\omega) &= 2\pi A^n \sum_{\substack{\sum \omega_i = \omega \\ r_1, r_n = -Ri=1}}^R \prod_{i=1}^n \frac{A_i |r_i|}{2} e^{j\phi_{r_i}} H_n(j\omega_{r_1}, \dots, j\omega_{r_{n-1}}, j\omega_{r_n}) \delta(\omega_n - \omega_{r_n}) \quad (21) \\
&= 2\pi A^n \sum_{\substack{\sum \omega_i = \omega \\ r_1, r_n = -Ri=1}}^R \prod_{i=1}^n \frac{A_i |r_i|}{2} e^{j\phi_{r_i}} H_n^{asym}(j\omega_{r_1}, \dots, j\omega_{r_n})
\end{aligned}$$

21 numaralı denklem 17'nin içine yerleştirildiğinde  $n$ 'inci dereceden bileşenler aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned}
\frac{A_r}{2} e^{j\phi_r} N_{r,s}(A, j\omega_r) &= \sum_{l_1, l_n = -L}^L c_n(l_1, \dots, l_n) \sum_{\substack{\sum \omega_i = \omega_r \\ r_1, r_n = -Ri=1}}^R \prod_{i=1}^n \frac{A_i |r_i|}{2} e^{j\phi_{r_i}} (j\omega_{r_i})^{l_i} \quad (22) \\
&\times H_n^{asym}(j\omega_{r_1}, \dots, j\omega_{r_n})
\end{aligned}$$

22 numaralı denklem  $H_n(\cdot)$  için 12 ve 13 numaralı denklem ifadeleri birlikte kullanıldığı zaman polinom tipindeki doğrusal olmayan herhangi bir diferansiyel sistem için tanımlama fonksiyonuna imkan verir ve herhangi bir harmonik giriş için hesaplanır. Bununla beraber eğer model herhangi bir doğrusal olmayan çıkış içeriyorsa Volterra serileri ve bundan dolayı 22 numaralı denklem ifadesindeki tanımlama fonksiyonu sonsuz seriler içerecektir. Bu belki çıkıştaki doğrusal olmayan tekrarlamalı terimlerin etkileri genişlemeye başladığından beklenen bir durumdur (tekrarlamalı olmayan giriş frekansı bileşenleri). Bununla beraber düşük giriş genlikleri için bu serileri kesmek mümkün olabilir, fakat bu 16 numaralı denklem incelendiğinde açıkça görülebileceği gibi giriş genliği ' $A$ ' arttırıldığında yüksek dereceden terimler artan bir oranda baskın olmaya başlar ve bunun için kesim uygun olmaz.

#### 4. ÖRNEK: DUFFİNG DENKLEMİ

12 ve 22 numaralı genel denklemler 18 numaralı denklem ile sınıflandırılan herhangi bir giriş için özel tanımlama fonksiyonlarının çıkarılmasında kullanılabilir. Çok genel olarak kullanılan ve en basitlerinden birisi tek sinüs uyarımlı olanıdır ( $R = 1$  durumu): Tek Sinüslü Tanımlama Fonksiyonu - TSTF (Single Sinusoid Describing Function - SSDF). Bu metodun gösterilmesinde sürekli zamanda doğrusal olmayan Duffing denklem modelini göz önünde bulunduralım. İlgili denklem aşağıda görüldüğü gibi ifade edilir,

$$\ddot{y}(t) + 2\mu\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) + \alpha_3 y(t)^3 = \omega_n^2 u(t) \quad (23)$$

burada  $\omega_n = 1$  (normalleştirilmiş),  $\mu = 0.15$  ve  $\alpha_3 = 4$ 'dür. 23 numaralı denklemin birinci dereceden bileşeni sadece doğrusal terimlerden elde edilen transfer fonksiyonunun benzeridir ve giriş uyarımından bağımsızdır:

$$H_{1,1}(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\mu(j\omega) + \omega_n^2} \quad (24)$$

Çok genel olmasına rağmen 22 numaralı denklemde çarpımın önünde bulunan çoklu toplama giriş dizisinden mümkün olan bütün  $n$ 'lerin her iki yöndeki frekans bileşenlerini birden elde etmede kullanılır. Netice olarak sadece ilgilenilen  $\omega_r$  frekansındaki çıkış bileşeninin cevabı seçilmiş olur. Örneğin giriş frekansının ikişerli kombinasyonu  $\{-\omega, +\omega\}$  oluşmadığından ikinci dereceden bileşen sıfırdır ( $r=1$  için). Ancak üçüncü dereceden bileşenin durumunda giriş

### Genelleştirilmiş Tanımlama Fonksiyonu Serileri...

frekansının üçerli kombinasyonuna tabi olanlar  $\omega$ 'nın toplamı olduğundan ilgilenilen temel frekanstaki çıkışı üretir:

$$\begin{aligned} & \{ \omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \} \\ & \{ 1 \quad 1 \quad -1 \} \\ & \{ 1 \quad -1 \quad 1 \} \\ & \{ -1 \quad 1 \quad 1 \} \end{aligned} \quad (25)$$

örneğin ilk olarak kübik terimin katsayısı ile birlikte,  $c_{3,0}(0,0,0) = \alpha_3$  ( $l_1 = l_2 = l_3 = 0$  işaretlerine göre), sadece bunların permutasyonları 22 numaralı denklem ifadesindeki terimlerden bir tanesini verir, yani

$$\text{örnek terim} = -\frac{\alpha_3 A_1^3}{8} \times \frac{H_1(j\omega)H_1(j\omega)H_1(j\omega)}{[(j\omega)^2 + 2\mu(j\omega) + \omega_n^2]} \quad (26)$$

Üçüncü dereceden bileşenin tamamı 22 numaralı denkleme göre ilgili her bir permutasyondan oluşan toplam katkı ile bulunur;

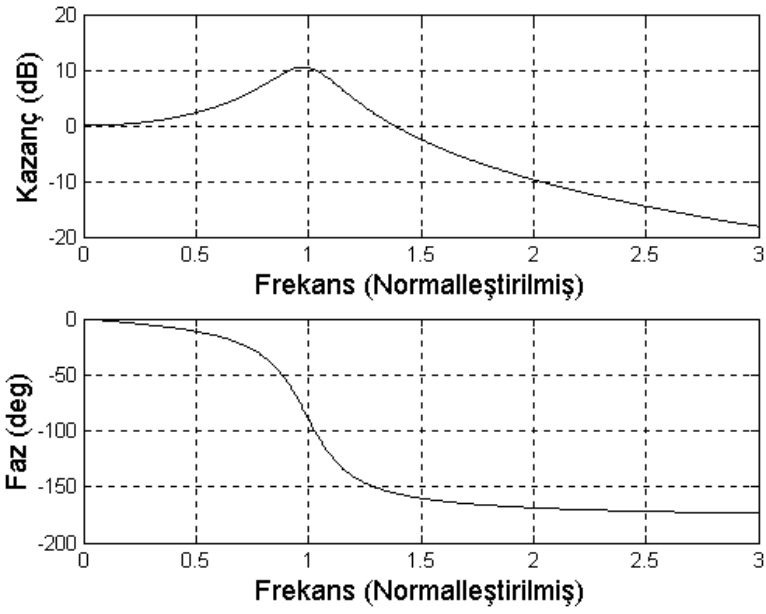
$$\begin{aligned} H_{3,1,1}(j\omega) &= -\frac{3\alpha_3 A_1^2}{4} \times \frac{H_1(-j\omega)H_1^2(j\omega)}{[(j\omega)^2 + 2\mu(j\omega) + \omega_n^2]} \\ &= -\frac{3\alpha_3}{4\omega_n^2} A_1^2 H_1(-j\omega)H_1^3(j\omega) \end{aligned} \quad (27)$$

Şimdi istenen  $TSTF$ 'in ilk iki terimi bu denklemlerin 16 numaralı denklem ile birleştirilmesinden elde edilebilir,

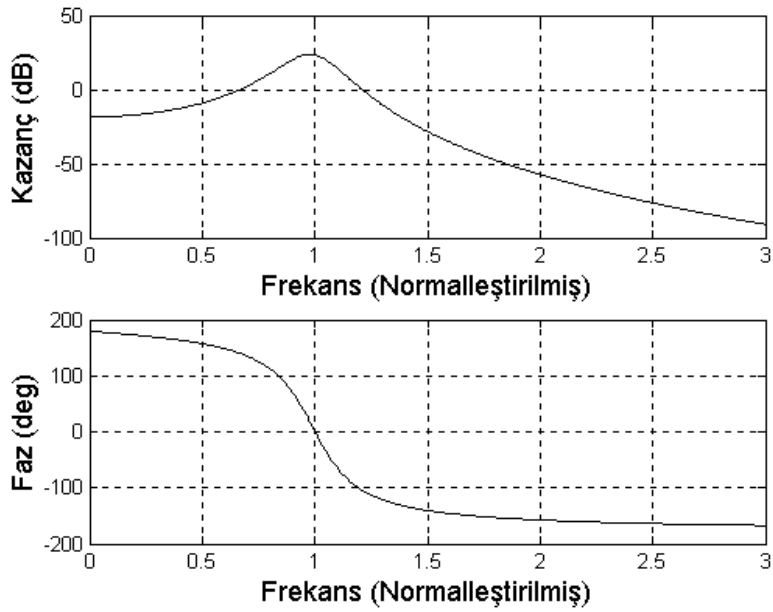
$$N_{1,1}(A, A_1, j\omega) = H_1(j\omega) - \frac{3\alpha_3 A^2}{4\omega_n^2} A_1^2 H_1(-j\omega)H_1^3(j\omega) \quad (28)$$

Bununla beraber, çok daha genel vurgulamak gerekirse, 28 numaralı denklemdeki tanımlama fonksiyonu için elde edilen serilerin sonuçları sonsuzdur. Çünkü 23 numaralı Duffing denklem örneği çıkışında doğrusal olmayan bir kübik terim içerir. Bu kesimin etkileri elde edilen  $TSTF$  ve onun bileşenleri ile bunların simülasyonlarından elde edilen sonuçların karşılaştırılmasına ait çizimlerden tayin edilebilir.

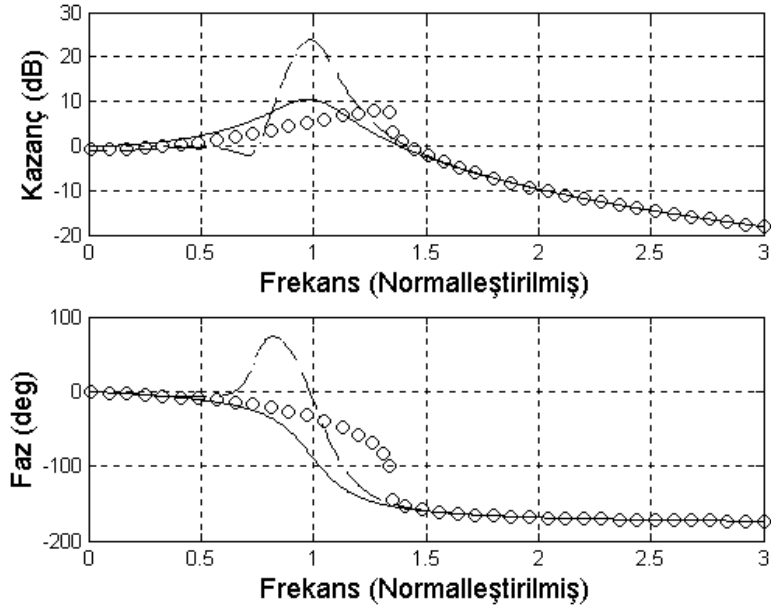
Örneğin Şekil 1'de görülen birinci dereceden bileşen modeldeki doğrusal terimlerin frekans cevabıdır. Sonra bu yüksek bileşenlerin  $A^{n-1} H_n(\cdot)$  tamamının vektörel toplamıyla değiştirilebilir. Örneğin  $A_1=0.2$  kullanılarak elde edilen üçüncü dereceden frekans cevabı Şekil 2'de görülmektedir. Dikkat edilecek olursa alçak frekans bölgesindeki  $H_3(\cdot)$ 'nin kazancı toplam cevaptan büyük olmakla beraber bu bileşenin cevabı doğrusal bileşenle birlikte yaklaşık olarak  $180$  derecelik faz kayması gösterir. Sonuçta elde edilen kazanç tek başına elde edilen doğrusal cevaptan daha küçüktür (Şekil 3). Yüksek frekansta birinci ve üçüncü dereceden bileşenler yaklaşık olarak aynı fazdadır ve her bir kazanç ilave edilir. Bundan dolayı elde edilen yüksek frekans kazancı üzerinden doğrusal cevaba doğru yönelir. Çünkü uygulamada  $H_3(\cdot)$ 'ün kazancı yüksek frekansta sifıra meyillidir. Rezonans bölgesine (veya orta frekans alanına) bakıldığında üçüncü dereceden terimin etkisiyle rezonans ucundaki kazançta anlamlı bir genişleme olduğu gözlenir.



Şekil 1. Birinci-derece fonksiyonun frekans cevabı,  $H_{1,1}(j\omega)$



Şekil 2. Üçüncü-derece fonksiyonun frekans cevabı,  $H_{3,1}(j\omega)$  ( $A_1=0.2$ )



Şekil 3. Doğrusal frekans cevabı (düz çizgi), TSTF sonuçları (noktalı çizgi  $A_1=0.2$ ;  $A=1.0$ ) ve simülasyon sonuçları (küçük daire  $A_1=0.2$ )

Bunların analitik sonuçlarının doğruluğu Şekil 3'de gösterilen simülasyon sonuçları ile karşılaştırılarak tayin edilebilir. Kazancın küçük olduğu (0 dB'den az) alçak ve yüksek frekans bölgelerinde analitik yaklaşım uygundur. Fakat yüksek kazançta rezonans bölgesinde daha büyük hatalar görülebilir. Bu davranış kesimin bir sonucudur.  $A^{n-1} H_n(\cdot)$  çarpımının küçük olduğu frekanslarda kesimin etkileri önemsenmeyecek değerde olacaktır. Ama bu çarpımın büyük olduğu rezonans bölgesinde yüksek dereceden terimler ciddi hatalara yol açtığından ihmal edilmemelidir.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada frekans boyutundaki analiz metotlarından birisi olan Tanımlama Fonksiyonu serileri Duffing denklemleri olarak bilinen örnek bir model üzerinde sunulmuştur. Aynı zamanda elde edilen analitik sonuçlar simülasyon sonuçları ile birlikte karşılaştırılmıştır. Genel olarak Volterra modelinden özel bir Tanımlama Fonksiyonunun hesaplanması fikri oldukça çekicidir. Çünkü bu metot genel polinom tipindeki herhangi bir doğrusal olmayan diferansiyel denkleme uygulanabilir ve 18 numaralı denklem formundaki herhangi bir harmonik giriş için elde edilebilir. Ancak, Volterra serisinin kendisinde olduğu gibi orijinal sistem herhangi bir geri-beslemeli doğrusal olmayan çıkış bileşeni içeriyorsa Tanımlama Fonksiyonunda elde edilen cevabın serisel karşılıkları sonsuz sayıda terimler içerecektir. Tanımlama Fonksiyonunun hesaplanmasındaki alternatif metot harmonik denge metodunu temel alabilir. Dolayısıyla gelecek çalışma konusu harmonik denge metodunu temel alan bir yaklaşım olacaktır.



**KAYNAKLAR**

- [1] Wright, J.H.G., Marshfield, W.B., “Ship Roll Response and Capsize Behaviour in Beam Seas”, *Trans. Royal Inst of Naval Architects*, Vol. 122, 129-148, 1980.
- [2] Cardo, A., Francescutto, A., Nabergoj, R., “Ultraharmonics and Subharmonics in the Rolling Motion of a Ship: Steady State Solution”, *Int. Shipbuilding Progress*, Vol. 28, No. 326, 234-251, 1981.
- [3] Nayfeh, A.H., Khdeir, A.A., “Nonlinear Rolling of Ships in regular Beam Seas”, *Int. Shipbuilding Progress*, Vol. 33, No. 379, 40-49, 1986.
- [4] Senjanovic, I., “Harmonic Analysis of Nonlinear Oscillations of Cubic Dynamical Systems”, *J. Ship Research*, Vol. 38, No. 3, 225-238, 1994.
- [5] Volterra, V., “Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations”, Blackie and Son Limited, 1930.
- [6] Brilliant, M.B., “Theory of the Analysis of Nonlinear Systems”, Technical Report: MIT Research Lab of Electronics, MIT, Cambridge, Massachusetts, 1958.
- [7] George, D.A., “Continuous Nonlinear Systems”, Technical Report 335, MIT Research Lab, California, 1959.
- [8] Bedrosian, E. and Rice, S.O., “The Output Properties of Volterra Systems (Nonlinear Systems with Memory) Driven by Harmonic and Gaussian Inputs”, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, Vol. 59, 1688-1707, 1971.
- [9] Schetzen, M., “The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems”, John Wiley and Sons, New York, 1980.
- [10] Peyton Jones, J.C., “Mapping Nonlinear Integro-Differential Equations to a Generalised Describing Function Form”, *International Journal of Control*, Vol. 62, No. 5, 1145-1160, 1995a.
- [11] Gelb, A., Vander Velde, W.E., “Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design”, McGraw Hill Company, 1968.
- [12] Atherton, D.P., “Nonlinear Control Engineering”, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1975.
- [13] Peyton Jones, J.C. and Billings, S.A., “Describing Functions, Volterra Series, and the Analysis of Non-linear Systems in the Frequency Domain”, *International Journal of Control*, Vol. 53, No. 4, 871-887, 1991.
- [14] Peyton Jones, J.C., “Generalised Describing Functions for a Class of Nonlinear Difference and Differential Equation Models”, *Proceedings IFAC NOLCOS'95, Lake Tahoe, USA, 901-906, 1995b.*
- [15] Billings, S.A. and Peyton Jones, J.C., “Mapping Non-linear Integro-Differential Equations into the Frequency”, *International Journal of Control*, Vol. 52, No. 4, 863-879, 1990.