

## ARAŞTIRMA MAKALESİ

# LİNEER ELASTİK VE ÖN GERİLMELİ TABAKA İLE ÖRTÜLMÜŞ LİNEER ELASTİK VE ÖN GERİLMELİ YARI DÜZLEMDE GENELLEŞTİRİLMİŞ RAYLEIGH DALGALARININ DİSPERSİYONU

**Müslüm ÖZİŞİK**

*Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü,  
Davutpaşa-İSTANBUL*

**Geliş Tarihi: 21.04.2003**

**THE GENERALIZED RAYLEIGH WAVE DISPERSION IN A PRESTRESSED LINEAR ELASTIC HALF-PLANE COVERED WITH A PRESTRESSED LINEAR ELASTIC LAYER**

**ABSTRACT**

In this paper, by using linearized three dimensional wave theory equations in the framework of the piece-wise homogeneous body model, the dispersion of the generalized Rayleigh wave in the half plane, which is made of prestressed linear elastic medium covered with a prestressed linear elastic layer, has been investigated under complete and incomplete contact conditions.

**ÖZET**

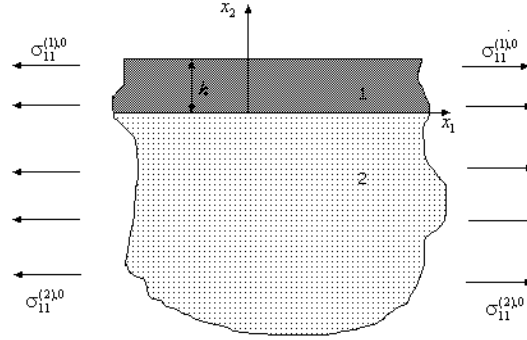
Bu makalede, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde üç boyutlu dalga teorisi denklemleri kullanılarak, ön gerilmeli lineer elastik bir tabaka ile örtülü ön gerilmeli lineer elastik malzemeden oluşmuş yarı düzlemde genelleşmiş Rayleigh dalgalarının dispersiyonu ideal ve ideal olmayan temas koşulları altında incelenmiştir.

## 1. GİRİŞ

Ön gerilmeli ortamlarda dalga yayılımına ait problemlerin incelenmesi 19. yüzyılın ikinci yarısında başlamış ve bu güne kadar teorik ve deneysel birçok çalışma yapılmıştır. [2, 3 ve bazı diğerleri] hariç hemen hemen bütün bu çalışmalar [5, 6, 8, 9, 17 ve bazı diğerleri] ön gerilmelerin dalga yayılımı hızına ve dalgaların dispersiyonlarına olan etkisi ile ilgilidir. Konuyla ilgili olarak 1986'dan önce yapılan araştırmalar, elde edilen sonuçlar ve yorumlanması [8, 9] kaynaklarında, sonraki yıllarda yapılan çalışmalar ise [10, 11, 17] kaynaklarında detaylı olarak verilmektedir. Ön gerilmeli homojen olmayan ortamlardaki dalga yayılımına ait ilk teşebbüsler ise [15] ile başlamış olup, [13, 14, 16] ile devam etmiş ve ayrıca üçüncü mertebeden elastik sabitlerin genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının dispersiyonuna olan etkisi [4] ile incelenmiştir.

Ele alınan problemde ise Şekil 1. deki gibi lineer elastik ve ön gerilmeli bir tabaka ile örtülmüş, lineer elastik ve ön gerilmeli yarı düzlemde  $ox_1$  eksen yönünde etki gösteren homojen yayılı normal ön gerilmesinin olduğu varsayılarak genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının dispersiyonu incelenmiştir.

Tabaka ve yarı düzlem malzemelerinin lineer elastik, homojen ve izotrop olduğu kabul edilmektedir. İncelenen problemin matematiksel formülasyonu elastisite teorisinin doğrusallaştırılmış üç boyutlu hareket denklemleri çerçevesinde yapılmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının dispersiyonu tabaka ve yarı düzlem arasında ideal ve ideal olmayan temas koşullarının olduğu durumlar için ayrı ayrı olarak incelenmiştir.



Şekil 1. Lineer elastik ve ön gerilmeli ortam

## 2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU

İncelenen problemin matematiksel formülasyonuna geçmeden önce doğrusallaştırılmış üç boyutlu elastisite teorisinin uygulanmasının gerektirdiği bazı kavram ve koşullar aşağıdaki gibi verilebilir. Cisimdeki gerilme ve şekil değiştirme durumu doğal, ön gerilmeli ve pertürbe edilmiş diye üç duruma ayrılabilir.

Doğal durum olarak cisimde hiçbir gerilme ve şekil değiştirme durumunun olmadığı durum kabul edilmektedir. Ön gerilmeli duruma karşılık gelen durumda gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirme bileşenleri üst (0) indisi ile sırasıyla  $\sigma_{ij}^{(m),0}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(m),0}$  ve  $u_i^{(m),0}$  biçiminde işaret edilmektedir. Bu büyüklüklerin elastisite teorisinin statik durumlara karşılık gelen bütün denklemler takımını sağladığı varsayılmaktadır. Adı geçen denklemler takımı başlangıçta kartezyen koordinat sistemi ile çakışan  $ox_1x_2x_3$  koordinat sistemi ile belirlenen Lagrange koordinatlarında geometrik lineer olmayan durumda aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sigma_{in}^{(m),0} \left( \delta_n^j + \frac{\partial u_i^{(m),0}}{\partial x_n} \right) \right] = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^{(m),0} = \lambda^{(m)} \varepsilon^{(m),0} \delta_i^j + 2\mu^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(m),0} \quad (2)$$

$$\varepsilon^{(m),0} = \varepsilon_{11}^{(m),0} + \varepsilon_{22}^{(m),0} + \varepsilon_{33}^{(m),0}$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(m),0} = \frac{\partial u_i^{(m),0}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(m),0}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n^{(m),0}}{\partial x_i} \frac{\partial u_n^{(m),0}}{\partial x_j} \quad (3)$$

(1)-(3)'de verilen ifadelerde aynı adlı indislere göre Einstein toplamı uygulanmıştır.

Doğrusallaştırılmış üç boyutlu elastisite teorisinin uygulandığı birçok durumlarda (1)-(3)'deki lineer olmayan terimler ihmal edilebilir. Dolayısıyla ön gerilme durumunda klasik lineer elastisite teorisi çerçevesinde ön gerilmelerin ve şekil değiştirmelerin yayılımı belirlenebilmektedir. Bu durumda (2) denklemleri yine sağlanmakta, (1) ve (3) denklemleri ise sırasıyla aşağıdaki biçimde yazılmaktadır.

**Linear Elastik ve Ön Gerilmeli Tabaka ile Örtülmüş Linear...**

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(m),0}}{\partial x_i} = 0. \quad (4)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(m),0} = \frac{\partial u_i^{(m),0}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(m),0}}{\partial x_i}. \quad (5)$$

Ön gerilmelerin belirlenebilmesi için (1)-(3) denklemlerinden başka uygun sınır koşulları da verilmektedir. Bu koşullar cismin S yüzeyinin  $S_1$  kısmında kuvvetlerle,  $S_2$  kısmında ise yer değiştirmelerle verilmektedir.  $S_1$  kısmında bu koşulları geometrik lineer olmayan durumda

$$\sigma_{in}^{(m),0} \left( \delta_n^j + \frac{\partial u_i^{(m),0}}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_1} n_i = P_j. \quad (6)$$

biçiminde, lineer durumda ise

$$\sigma_{ij}^{(m),0} \Big|_{S_1} n_i = P_j. \quad (7)$$

olarak verilebilir. Cismin  $S_2$  kısmında ise her iki durumda (lineer ve lineer olmayan durumlarda) verilen koşullar

$$u_i^{(m),0} \Big|_{S_2} = f_i. \quad (8)$$

olarak yazılabilmektedir.

(7) ve (8)'deki  $P_j$  ve  $f_i$  'ler bilinen fonksiyonlardır.

İncelenen problemdeki ön gerilmelerin belirtilmesi, uygun temas koşullarının da sağlanmasını gerektirmektedir. Bu temas koşulları iki cismin ortak  $S_3$  temas yüzeyinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{in}^{(1),0} \left( \delta_n^j + \frac{\partial u_i^{(1),0}}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_3} n_i = \sigma_{in}^{(2),0} \left( \delta_n^j + \frac{\partial u_i^{(2),0}}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_3} n_i. \quad (9)$$

$$u_i^{(1),0} \Big|_{S_3} = u_i^{(2),0} \Big|_{S_3}. \quad (10)$$

Lineer durumda da (10) ile verilen temas koşulları sağlanmakta, (9) ise aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\sigma_{ij}^{(1),0} \Big|_{S_3} n_i = \sigma_{ij}^{(2),0} \Big|_{S_3} n_i. \quad (11)$$

(6), (7), (9) ve (11)'deki  $n_i$  'ler ait oldukları yüzeyin dış birim normalinin bileşenlerini göstermektedir.

Böylece yukarıdaki verilerle ön gerilmeye ait büyüklükler belirlenmektedir. Şimdi bu ön gerilmelere, şekil değiştirmelere ve yer değiştirmelere sırasıyla  $\sigma_{ij}^{(m)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(m)}$  ve  $u_i^{(m)}$  pertürbasyonlarını ekleyerek ve

$$\sigma_{ij}^{(m)'} = \sigma_{ij}^{(m),0} + \sigma_{ij}^{(m)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(m)'} = \varepsilon_{ij}^{(m),0} + \varepsilon_{ij}^{(m)}, \quad u_i^{(m)'} = u_i^{(m),0} + u_i^{(m)}. \quad (12)$$

formülleriyle belirlenen pertürbasyon durumu oluşturularak

$$\sigma_{ij}^{(m)} \ll \sigma_{ij}^{(m),0}, \quad \varepsilon_{ij}^{(m)} \ll \varepsilon_{ij}^{(m),0}, \quad u_i^{(m)} \ll u_i^{(m),0}. \quad (13)$$

olduğu varsayılmaktadır.

(12) formülüyle belirlenen büyüklükler elastisite teorisinin geometrik lineer olmayan hareket denklemlerini sağlar yani

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \sigma_{in}^{(m),0} + \sigma_{in}^{(m)} \right) \left( \frac{\partial (u_i^{(m),0} + u_i^{(m)})}{\partial x_n} \right) \right] = \left( \rho^{(m),0} + \rho^{(m)} \right) \frac{\partial^2 (u_i^{(m),0} + u_i^{(m)})}{\partial t^2} \quad (14)$$

$$\sigma_{ij}^{(m),0} + \sigma_{ij}^{(m)} = \lambda^{(m)} e^{(m),0} \delta_{ij}^j + 2\mu^{(m)} \left( \varepsilon_{ij}^{(m),0} + \varepsilon_{ij}^{(m)} \right) \quad (15)$$

$$e^{(m),0} = \left( \varepsilon_{11}^{(m),0} + \varepsilon_{11}^{(m)} \right) + \left( \varepsilon_{22}^{(m),0} + \varepsilon_{22}^{(m)} \right) + \left( \varepsilon_{33}^{(m),0} + \varepsilon_{33}^{(m)} \right)$$

$$2 \left( \varepsilon_{ij}^{(m),0} + \varepsilon_{ij}^{(m)} \right) = \frac{\partial u_i^{(m),0} + u_i^{(m)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(m),0} + \partial u_j^{(m)}}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_n^{(m),0} + \partial u_n^{(m)}}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_n^{(m),0} + \partial u_n^{(m)}}{\partial x_j} \right) \quad (16)$$

olur.

Aynı şekilde pertürbasyon durumu için (6), (8), (9) ve (10) sınır koşulları aşağıdaki biçimde yazılabilir

$$\left( \sigma_{in}^{(m),0} + \sigma_{in}^{(m)} \right) \left( \delta_n^j + \frac{\partial u_i^{(m),0} + \partial u_i^{(m)}}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_1} n_i = P_j. \quad (17)$$

$$\left( u_i^{(m),0} + u_i^{(m)} \right) \Big|_{S_2} = f_i. \quad (18)$$

$$\left( \sigma_{in}^{(1),0} + \sigma_{in}^{(1)} \right) \left( \delta_n^j + \frac{\partial u_i^{(1),0} + \partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_3} n_i = \left( \sigma_{in}^{(2),0} + \sigma_{in}^{(2)} \right) \left( \delta_n^j + \frac{\partial u_i^{(2),0} + \partial u_i^{(2)}}{\partial x_n} \right) \Big|_{S_3} n_i \quad (19)$$

$$\left( u_i^{(1),0} + u_i^{(1)} \right) \Big|_{S_3} = \left( u_i^{(2),0} + u_i^{(2)} \right) \Big|_{S_3}. \quad (20)$$

(14)-(20)'de (1)-(3), (6), (8), (9) ve (10) ilişkileri göz önüne alınır ve pertürbasyonların birinci mertebeden yüksek mertebeli terimleri ihmal edilirse (14)-(20)'den pertürbasyonlar için aşağıdaki biçimde yazılabilen doğrusallaştırılmış hareket denklemleri, sınır ve temas koşulları elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sigma_{ij}^{(m)} + \sigma_{in}^{(m),0} \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_n} \right] = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_i^{(m)}}{\partial t^2}. \quad (21)$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \lambda^{(m)} e^{(m)} + 2\mu^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \quad (22)$$

$$e^{(m)} = \varepsilon_{11}^{(m)} + \varepsilon_{22}^{(m)} + \varepsilon_{33}^{(m)}$$

**Linear Elastik ve Ön Gerilmeli Tabaka ile Örtülmüş Linear...**

$$2\varepsilon_{ij}^{(m)} = \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial x_i} . \quad (23)$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} + \sigma_{in}^{(m),0} \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_n} \Big|_{S_1} n_i = P_j . \quad (24)$$

$$u_i^{(m)} \Big|_{S_2} = f_i . \quad (25)$$

$$\sigma_{ij}^{(1),0} + \sigma_{in}^{(1),0} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \Big|_{S_3} n_i = \sigma_{ij}^{(2),0} + \sigma_{in}^{(2),0} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_n} \Big|_{S_3} n_i . \quad (26)$$

$$u_i^{(1)} \Big|_{S_3} = u_i^{(2)} \Big|_{S_3} . \quad (27)$$

Yukarıda verilen (21)-(27) denklemlerinin elde edilmesinde  $\frac{\partial u_i^{(m),0}}{\partial x_j} \ll 1$  eşitsizliğinin

sağlandığı varsayılarak  $\delta_i^j + \frac{\partial u_i^{(m),0}}{\partial x_j} \approx \delta_i^j$  olduğu kabul edilmiştir.

Böylece elastisite teorisinin doğrusallaştırılmış üç boyutlu (21)-(27) denklemleri elde edilmiş olur. Bu denklemlerden yararlanarak incelenen problemin matematiksel formülasyonunu oluşturmak mümkün olmaktadır.

Şekil 1.'de gösterilen ön gerilmeli tabaka ile örtülü yarı düzlem ele alınsın. Orijini tabaka ve yarı düzlemin ara yüzeyinde olan,  $ox_1$  ve  $ox_2$  eksenleri Şekil 1.'de gösterildiği gibi yönelen, başlangıçta kartezyen koordinatlarla çakışan Lagrange koordinat takımı seçilsin. Düzlem şekil değiştirme durumunu ele alarak tabaka ve yarı düzlemde ön gerilmelerin aşağıdaki biçimde olduğu varsayılsın.

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1),0} &= \text{sabit}_1 \neq 0 , \quad \sigma_{12}^{(1),0} = \sigma_{22}^{(1),0} = 0 , \\ \sigma_{11}^{(2),0} &= \text{sabit}_2 \neq 0 , \quad \sigma_{12}^{(2),0} = \sigma_{22}^{(2),0} = 0 . \end{aligned} \quad (28)$$

(28)'in ön gerilmeye ait yukarıda verilen bütün denklemleri, ele alınan duruma ait sınır ve temas koşullarını da sağladığı açıkça gözükmektedir. Bu durumda (21)-(27)'de verilen denklem ve koşullardan ele alınan durum için aşağıdaki hareket denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} &= \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial t^2} , \\ \frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(m)}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1^2} &= \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial t^2} . \end{aligned} \quad (29)$$

elastisite bağıntıları,

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \lambda^{(m)} \theta^{(m)} \delta_{ij} + 2\mu^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(m)} , \quad \theta^{(m)} = \varepsilon_{11}^{(m)} + \varepsilon_{22}^{(m)} , \quad i,j,m=1,2 \quad (30)$$

ve geometrik ilişkiler

$$\varepsilon_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial x_i} \right), \quad i,j=1,2 \quad (31)$$

elde edilmiş olur.

(28) ön gerilme durumunu bir daha göz önüne alarak tabakanın dış yüzeyine hiçbir dış etkinin olmadığını da varsayarak bu düzlem üzerindeki sınır koşulları

$$\sigma_{12}^{(1)}|_{x_2=h} = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)}|_{x_2=h} = 0. \quad (32)$$

biçiminde yazılabilir.

Şunu da belirtelim ki tabaka ve yarı düzlem ara yüzeyinde ideal ve ideal olmayan temas koşullarının sağlandığı durumlar ayrı ayrı ele alınmaktadır. Yukarıdaki veriler göz önüne alınarak bu koşullar ideal temas koşulları için,

$$u_1^{(1)}|_{x_2=0} = u_1^{(2)}|_{x_2=0}, \quad \sigma_{12}^{(1)}|_{x_2=0} = \sigma_{12}^{(2)}|_{x_2=0}, \quad i,j=1,2 \quad (33)$$

şeklinde ideal olmayan temas koşulları için de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_2^{(1)}|_{x_2=0} = u_2^{(2)}|_{x_2=0}, \quad \sigma_{22}^{(1)}|_{x_2=0} = \sigma_{22}^{(2)}|_{x_2=0}, \quad \sigma_{12}^{(1)}|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{12}^{(2)}|_{x_2=0} = 0. \quad (34)$$

Bunlardan başka aşağıdaki sönüm koşullarının da sağlandığı varsayılmaktadır.

$$\sigma_{ij}^{(2)} \xrightarrow{x_2 \rightarrow -\infty} 0, \quad u_i^{(2)} \xrightarrow{x_2 \rightarrow -\infty} 0, \quad i=1,2. \quad (35)$$

Böylece ele alınan lineer elastik ve ön gerilmeli tabaka ile örtülü lineer elastik ve ön gerilmeli yarı düzlemde  $ox_1$  eksen yönünde yayılan ve (21)-(35) koşullarını sağlayan dalgaların yayılmasını incelemek için gerekli olan bütün denklem takımları ve koşulları elde edilmekte, dolayısıyla incelenen problemin matematiksel formülasyonunu (28)-(35) biçiminde vermek mümkün olmaktadır.

### 3. İDEAL VE İDEAL OLMAYAN TEMAS KOŞULLARI ÇERÇEVESİNDE UYGUN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİN BULUNMASI VE DİSPERSİYON DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

(31) ilişkilerini (30)'da, (30)'u ise (29)'da yerine yazarsak yer değiştirmelerle yazılmış aşağıdaki hareket denklemleri elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \lambda^{(m)} \left( \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + 2\mu^{(m)} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} + \mu^{(m)} \left( \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\ \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} = \rho^{(m),0} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial t^2}, \\ \lambda^{(m)} \left( \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + 2\mu^{(m)} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_2^2} + \mu^{(m)} \left( \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\ \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1^2} = \rho^{(m),0} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Klasik elastisite teorisinin dinamik problemlerinde, Akbarov ve Özyayın (2001a,b) çalışmalarında kullanılan yer değiştirmeler için aşağıdaki biçimde verilmiş  $\varphi^{(m)}$  ve  $\psi^{(m)}$  potansiyellerinden yararlanılmasının mümkün olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

**Linear Elastik ve Ön Gerilmeli Tabaka ile Örtülmüş Lineer...**

Yer değiştirmelerin bu potansiyeller ile ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} u_1^{(m)} &= \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x_2} , \\ u_2^{(m)} &= \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x_1} , \quad m=1,2. \end{aligned} \quad (37)$$

Bu ifadeler (36)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left( \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi^{(m)}}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 \psi^{(m)}}{\partial x_2 \partial x_1^2} \right) + \mu^{(m)} \left( \frac{\partial^3 \varphi^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 \psi^{(m)}}{\partial x_2^3} \right) + \left( \lambda^{(m)} + \mu^{(m)} \right) \\ \left( \frac{\partial^3 \varphi^{(m)}}{\partial x_2^2 \partial x_1} - \frac{\partial^3 \psi^{(m)}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) + \rho^{(m),0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x_2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \left( \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi^{(m)}}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 \psi^{(m)}}{\partial x_2^2 \partial x_1} \right) + \left( \mu^{(m)} + \sigma_{11}^{(m),0} \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi^{(m)}}{\partial x_2 \partial x_1^2} - \frac{\partial^3 \psi^{(m)}}{\partial x_1^3} \right) + \left( \lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} \right) \\ \left( \frac{\partial^3 \varphi^{(m)}}{\partial x_2 \partial x_1^2} - \frac{\partial^3 \psi^{(m)}}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) + \rho^{(m),0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

denklemleri elde edilir. (38) denklemi aşağıdaki forma sokulabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nabla \varphi^{(m)} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}} \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\left( c_1^{(m)} \right)^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \nabla \psi^{(m)} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \right. \\ \left. \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\left( c_1^{(m)} \right)^2} \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Aynı şekilde (39)'dan aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \nabla \varphi^{(m)} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}} \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\left( c_1^{(m)} \right)^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nabla \psi^{(m)} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \right. \\ \left. \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\left( c_2^{(m)} \right)^2} \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

(40) ve (41)'den gözüktüğü gibi  $\varphi^{(m)}$  ve  $\psi^{(m)}$  potansiyelleri sırasıyla

$$\nabla^2 \varphi^{(m)} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}} \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial x_1^2} = \frac{1}{(c_1^{(m)})^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial t^2}. \quad (42)$$

$$\nabla^2 \psi^{(m)} + \frac{\sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial x_1^2} = \frac{1}{(c_2^{(m)})^2} \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial t^2}. \quad (43)$$

denklemlerini sağlarsa (37) formülüyle belirlenen yer değiştirmeler (36) denklemlerini özdeşlikle sağlar. (40)-(43) denklemlerinde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  şeklinde bir operatör (Laplace operatörü),

$$c_1^{(m)} = \sqrt{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) / \rho^{(m)}}, \quad c_2^{(m)} = \sqrt{\mu^{(m)} / \rho^{(m)}} \text{ dir.}$$

Böylece (36) ile verilen denklemler takımının çözümü (42) ve (43) denklemlerinin çözümüne indirgenmiş olmaktadır.

(42) ve (43) denklemlerinde  $\sigma_{11}^{(m),0} = 0$  kabul edilirse klasik elastisite teorisinde karşılaşılan uygun denklemler elde edilmiş olur.

Buradaki  $\varphi^{(m)}$  ve  $\psi^{(m)}$  fonksiyonları (incelenen problemin karakterine uygun olarak) aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\varphi^{(m)} = \varphi_0^{(m)}(x_2) \cos(kx_1 - \omega t),$$

$$\psi^{(m)} = \psi_0^{(m)}(x_2) \sin(kx_1 - \omega t). \quad (44)$$

(44) ifadeleri (42) ve (43)'de yerine yazılırsa  $\varphi_0^{(m)}$  ve  $\psi_0^{(m)}$  için aşağıdaki denklemler elde edilmiş olur.

$$\frac{d^2 \varphi_0^{(m)}}{dx_2^2} - \frac{k^2 \sigma_{11}^{(m),0}}{\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}} \varphi_0^{(m)} = - \left( \frac{c}{c_1^{(m)}} \right)^2 \varphi_0^{(m)}. \quad (45)$$

$$\frac{d^2 \psi_0^{(m)}}{dx_2^2} - \frac{k^2 \sigma_{11}^{(m),0}}{\mu^{(m)}} \psi_0^{(m)} = - \left( \frac{c}{c_2^{(m)}} \right)^2 \psi_0^{(m)}. \quad (46)$$

Genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının tanımı gereğince (45) ve (46) denklemlerinin tabaka ve yarı düzlem için çözümleri aşağıdaki biçimde belirlenebilir.

$$\varphi_0^{(1)} = A_1^{(1)} \exp(ikp_1^{(1)} x_2) + A_2^{(1)} \exp(-ikp_1^{(1)} x_2),$$

$$\psi_0^{(1)} = B_1^{(1)} \exp(ikq_1^{(1)} x_2) + B_2^{(1)} \exp(-ikq_1^{(1)} x_2),$$

$$\varphi_0^{(2)} = C_1^{(2)} \exp(kq_1^{(2)} x_2), \quad \psi_0^{(2)} = D_1^{(2)} \exp(kq_2^{(2)} x_2). \quad (47)$$

(47)'de aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir.

$$p_1^{(1)} = \left( \frac{c^2}{(c_1^{(1)})^2} - \left( 1 + \frac{\sigma_{11}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) \right)^{1/2}, \quad p_2^{(1)} = \left( \frac{c^2}{(c_2^{(1)})^2} - \left( 1 + \frac{\sigma_{11}^{(1),0}}{\mu^{(1)}} \right) \right)^{1/2}$$



### Linear Elastik ve Ön Gerilmeli Tabaka ile Örtülmüş Lineer...

$$q_1^{(2)} = \left( 1 + \frac{\sigma_{11}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} - \frac{c^2}{(c_1^{(2)})^2} \right)^{1/2}, \quad q_2^{(2)} = \left( 1 + \frac{\sigma_{11}^{(2),0}}{\mu^{(2)}} - \frac{c^2}{(c_2^{(2)})^2} \right)^{1/2}. \quad (48)$$

(47), (44), (37), (31) ve (30)'dan yararlanılarak (33)'den ideal temas koşulları için, (34)'den ise ideal olmayan temas koşulları için aşağıdaki formda yazılabilecek dispersiyon denklemi elde edilir.

$$\det \left\| \alpha_{ij} \left( kh, c, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \sigma_{11}^{(1),0}, \sigma_{11}^{(2),0} \right) \right\| = 0. \quad (49)$$

Bu denklemin ideal ve ideal olmayan temas koşulları için ayrı ayrı sayısal çözülmesi ve elde edilen sonuçların yorumlanması aşağıdaki gibi yapılabilir.

#### 4. DISPERSİYON EĞRİLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE ÖN GERİLMELERİN BU EĞRİLERE ETKİSİNİN İNCELENMESİ

**Tablo 1.** Tabaka ve yarı düzlem malzemelerinin mekanik özellikleri

Malzeme	$\rho$ gr/cm <sup>3</sup>	$\lambda \times 10^{-4}$ Mpa	$\mu \times 10^{-4}$ Mpa
Çelik3	7.795	9.26	7.75
Bronz	7.20	8.16	3.84

İncelenen problemde mekanik özellikleri Tablo 1. ile verilen tabaka için bronz, yarı düzlem için ise çelik3 kullanılmıştır. Burada  $\rho$  malzemenin yoğunluğunu,  $\lambda$  ve  $\mu$  ise malzemenin Lamé sabitlerini göstermektedir. Bu malzeme çiftleri için (49) dispersiyon denkleminin çözümü sonucunda elde edilen

$$c = \frac{\omega}{k} = \varphi(kh, \sigma_{11}^{(1),0}, \sigma_{11}^{(2),0}). \quad (50)$$

dispersiyon eğrilerine ön gerilmelerin etkisi incelenmiştir. Bu amaçla (49) ile verilen dispersiyon denkleminin çözümü için aşağıdaki algoritma uygulanmıştır:

Bu denklemdeki  $kh$  ve  $c$  bilinmeyenlerdir. Denklem çözülmesi için  $kh$  parametresine başlangıçta değer verilerek (49) denklemindeki  $c$ 'nin  $c_2^{(1)} < c_1^{(1)} < c < c_2^{(2)} < c_1^{(2)}$  eşitsizliğini sağlaması koşuluyla (49) denklemini sağlayan değeri aranır. Bu değeri bulmak için  $c$ 'ye  $c_2^{(1)} < c_1^{(1)} < c < c_2^{(2)} < c_1^{(2)}$  eşitsizliğini sağlayacak şekilde ve mümkün mertebede en küçük olan sınırdan başlayarak değerler verilmekte ve seçilenler için (49) denkleminin sol tarafındaki determinantın işareti bulunmaktadır.  $c$ 'nin seçilen değerleri birbirinden küçük artımlarla farklılaştırılmaktadır. Eğer adı geçen determinantın  $c$ 'nin ardışık gelen iki değerindeki işaretleri farklı ise (49) denkleminin bu aralıkta kökünün olduğu varsayıp adım büyüklüğünü küçülterek istenen hassasiyet çerçevesinde bu kök bulunmaktadır. Daha sonra  $kh$ 'a başka bir değer verilip yine yukarıdaki işlemler tekrar edilmektedir. Böylece  $kh$  değerlerine bağımlı olarak dalganın  $c$  faz hızı bulunmuş olmaktadır. Yukarıdaki tanımlara göre eğer farklı  $kh$  değerleri için farklı  $c$ 'ler bulunursa dalga dispersive dalgadır. Eğer farklı  $kh$  değerleri için aynı  $c$  değeri bulunursa bu durumda dalga dispersive olmayan dalgadır. Bilindiği üzere genelleştirilmiş Rayleigh dalgaları dispersive dalgalardır.

Ayrıca (47) çözümündeki  $p_1^{(1)}$ ,  $p_2^{(1)}$ ,  $q_1^{(2)}$  ve  $q_2^{(2)}$  büyüklüklerinin gerçek sayı olması aşağıdaki eşitsizliğin sağlanmasını gerektirir.

$$c_2^{(1)} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{11}^{(1),0}}{\mu^{(1)}}} < c_1^{(1)} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{11}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}}} < c < c_2^{(2)} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{11}^{(2),0}}{\mu^{(2)}}} < c_1^{(2)} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{11}^{(2),0}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}}} \quad (51)$$

(51) ifadesi gerçek durumlar için (52) ifadesine eş değerdir.

$$c_1^{(1)} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{11}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}}} < c < c_2^{(2)} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{11}^{(2),0}}{\mu^{(2)}}} . \quad (52)$$

Fiziksel açıdan anlamı olan, yani (35) sönüm koşullarını sağlayan çözümlerin elde edilebilmesi

$$c < c_2^{(2)} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{11}^{(2),0}}{\mu^{(2)}}} . \quad (53)$$

eşitsizliğinin sağlanması durumunda mümkündür.

$$c_1^{(1)} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{11}^{(1),0}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}}} < c. \quad (54)$$

eşitsizliğinin sağlanması ise genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının tanımı gereğince ortaya çıkmaktadır.

(51)-(54) eşitsizlikleri ön gerilmesiz durumdaki  $c_2^{(1)} < c_1^{(1)} < c < c_2^{(2)} < c_1^{(2)}$  eşitsizliklerine ön gerilmelerin etkisini göstermektedir.

Şimdi (51) denklemindeki  $c$  hızını  $\bar{c}$  ile işaret edilerek

$$\eta = \frac{\bar{c} - c}{c} . \quad (55)$$

$$\psi^{(1)} = \frac{\sigma_{11}^{(1),0}}{\mu^{(1)}} , \quad \psi^{(2)} = \frac{\sigma_{11}^{(2),0}}{\mu^{(2)}} . \quad (56)$$

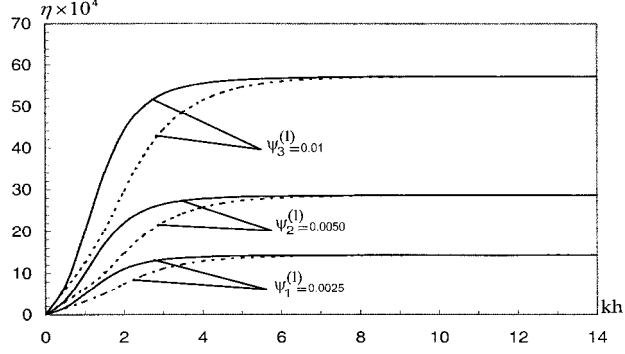
boyutsuz parametreleri ele alınsın.

(55)'deki  $c$ , uygun ön gerilmesiz durumdaki dalga yayılım hızını belirtmektedir.

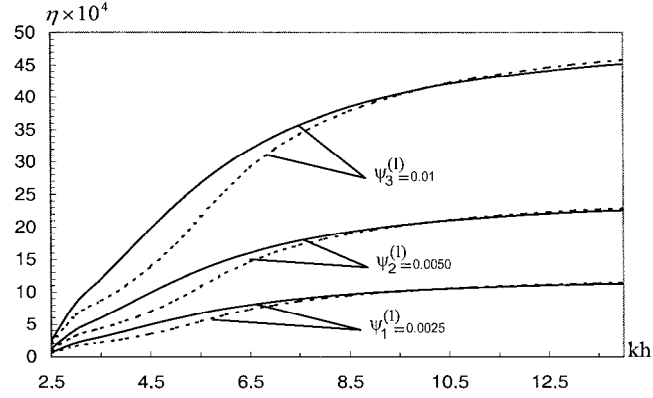
## 5. SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRİLMESİ

İlk önce  $\psi^{(1)} > 0$  ve  $\psi^{(2)} = 0$  durumu ele alınsın. Yani tabakada çekme ön gerilmesinin olduğu, yarı düzlemde ise hiçbir ön gerilme olmadığı durum göz önüne alınsın. Bu durum için  $\eta \times 10^4$  ile  $kh$  arasındaki bağıntıları gösteren sayısal sonuçlar bronz-çelik3 malzeme çifti için Şekil 3.2'de verilmektedir. Şekil 3.2'deki (a), (b), (c) ve (d) ile gösterilen durumlar Tolstoy ve Usdin (1953), Eringen ve Şuhubi (1975) ve diğer ilgili bir çok kaynakta gösterildiği gibi  $c = \psi(kh)$  fonksiyonunun  $M_{11}$ ,  $M_{21}$ ,  $M_{12}$  ve  $M_{22}$  'lerle belirtilen dal ve modlarına karşılık gelmektedir. Bundan başka bu şekillerde kesikli çizgilerle gösterilmiş olan eğriler ideal temas koşullarına, sürekli çizgilerle gösterilmiş olan eğriler ise ideal olmayan temas koşullarına karşılık gelen durumda elde edilen sonuçları göstermektedir. Ayrıca sayısal sonuçlar  $\psi^{(1)} = 0.0025$ ,  $0.050$  ve  $0.01$  değerlerinde elde edilmiş ve bu değerlerin karşılık geldiği grafikler şekiller üzerinde gösterilmiştir.

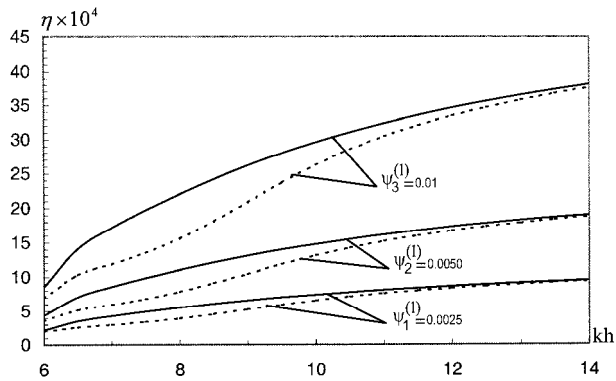
*Linear Elastik ve Ön Gerilmeli Tabaka ile Örtülmüş Linear...*



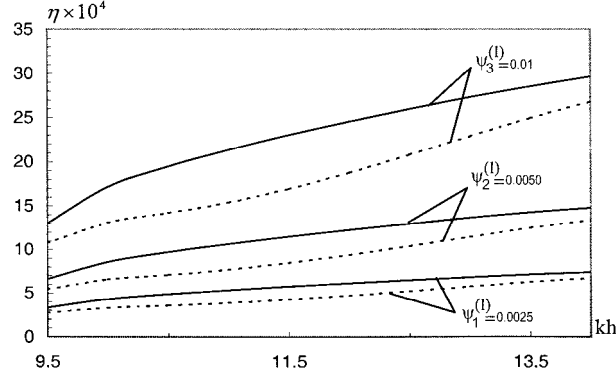
Şekil 2a.  $\psi^{(1)} > 0$  ,  $\psi^{(2)} = 0$  durumunda birinci dal birinci moda ait dispersiyon eğrileri



Şekil 2b.  $\psi^{(1)} > 0$  ,  $\psi^{(2)} = 0$  durumunda ikinci dal birinci moda ait dispersiyon eğrileri



Şekil 2c.  $\psi^{(1)} > 0$  ,  $\psi^{(2)} = 0$  durumunda birinci dal ikinci moda ait dispersiyon eğrileri



Şekil 2d.  $\psi^{(1)} > 0$ ,  $\psi^{(2)} = 0$  durumunda ikinci dal ikinci moda ait dispersiyon eğrileri

Elde edilen sayısal sonuçlardan açıkça görüldüğü gibi tabakada çekme ön gerilmesinin olması bütün ele alınan dal ve modlarda genelleşmiş Rayleigh dalgalarının yayılma hızını artırmaktadır. Söylenenler her iki tür temas koşulu (ideal ve ideal olmayan temas koşulu) için de geçerlidir.

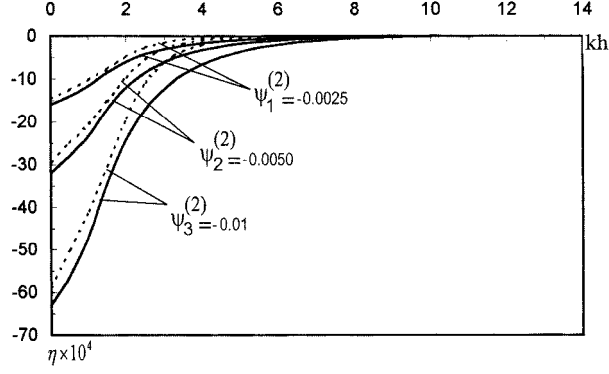
Bundan başka bu sonuçlar ön gerilmenin artmasıyla tüm ele alınan dal ve modlarda genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının hızının monoton olarak büyüdüğünü de açıkça ortaya koymaktadır. Birinci dalın birinci moduna ( $M_{11}$ ) ait sonuçlardan (Şekil 2.a) gözüktüğü gibi  $kh \rightarrow 0$ ' da  $\eta \rightarrow 0$  ve  $kh \rightarrow \infty$ ' da  $\eta \rightarrow \eta^*$  = sabit oluşmaktadır. Burada  $\eta^*$  ön gerilmeli tabaka malzemesine karşılık gelen adi Rayleigh dalgalarının yayılma hızına karşılık gelmektedir. Bu söylenenler bilinen fiziksel görüş ve yorumlarla çakışmaktadır.

Elde edilen sonuçlar temas koşullarının ideal olmamasının ön gerilmelerin genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının yayılma hızına etkisini belirli  $kh < (kh)^*$  değerleri için monoton olarak artırdığını göstermektedir.  $kh > (kh)^*$  değerlerinde ise  $M_{11}$ 'e karşılık gelen durumlar dışında temas koşullarının ideal olmaması ön gerilmelerin genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının yayılma hızına olan etkisini monoton olarak azaltmaktadır.

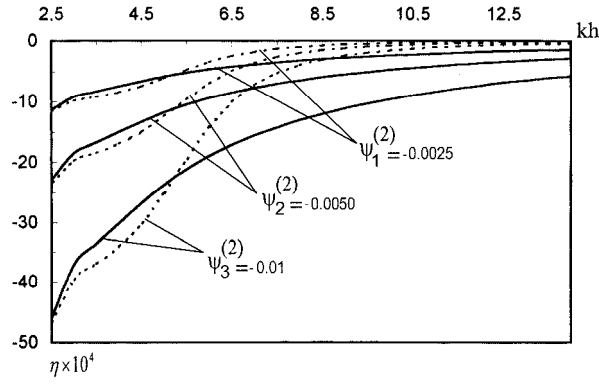
Elde edilen sayısal sonuçlar tabakadaki ön gerilmelerin  $kh$ 'ın kesim değerine önemli bir etki etmediğini göstermektedir.  $kh$ 'ın kesim değerlerinin ideal ve ideal olmayan temas koşulları için farklı olduğu durumlarda  $kh$ 'ın büyük değeri seçilerek Şekil 2'deki grafikler verilmiştir.

Şimdi ise bronz-çelik3 malzeme çifti için  $\psi^{(1)} = 0$ ,  $\psi^{(2)} < 0$  durumu ele alınsın ve  $\psi^{(2)} = -0.0025$ ,  $-0.0050$  ve  $-0.01$  değerleri seçilsin. Bu durumda  $\eta \times 10^4$  ile  $kh$  arasındaki bağıntıları gösteren grafikler Şekil 3'de verilmektedir.

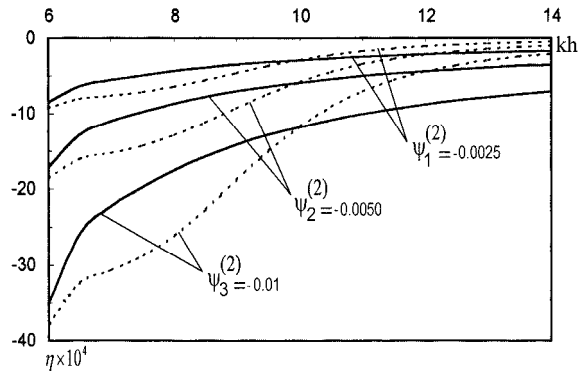
*Linear Elastik ve Ön Gerilmeli Tabaka ile Örtülmüş Lineer...*



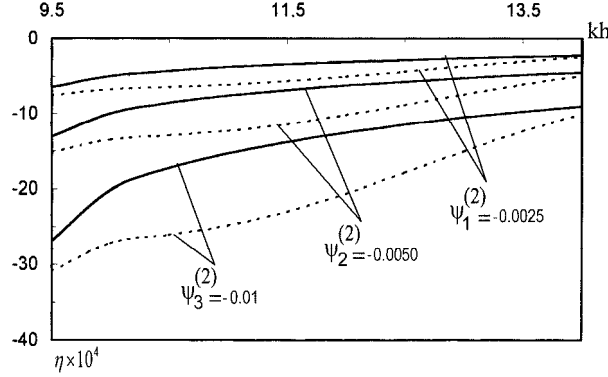
Şekil 3a.  $\psi^{(1)} = 0$  ,  $\psi^{(2)} < 0$  durumunda birinci dal birinci moda ait dispersiyon eğrileri



Şekil 3b.  $\psi^{(1)} = 0$  ,  $\psi^{(2)} < 0$  durumunda ikinci dal birinci moda ait dispersiyon eğrileri



Şekil 3c.  $\psi^{(1)} = 0$  ,  $\psi^{(2)} < 0$  durumunda birinci dal ikinci moda ait dispersiyon eğrileri



Şekil 3d.  $\psi^{(1)} = 0$ ,  $\psi^{(2)} < 0$  durumunda ikinci dal ikinci moda ait dispersiyon eğrileri

Şekil 2.'de yapılan işaretlemeler ve kabuller Şekil 3 için de aynı şekilde geçerlidir. Bu grafiklerden gözüktüğü gibi yarı düzlemdeki ön gerilmenin basınç ön gerilmesi olması genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının hızını azaltmaktadır.  $\psi^{(2)}$ 'nin mutlak değeri büyüdükçe genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının yayılma hızının değeri de monoton olarak azalmaktadır. Birinci dalın birinci modu ( $M_{11}$ ) için elde edilen  $\eta$  değerleri  $kh \rightarrow 0$ 'da ön basınç gerilmesi uygulanan yarı düzlem malzemesinin adı Rayleigh dalgalarının yayılım hızı değerine yaklaşmaktadır.

Temas koşullarının ideal veya ideal olmaması basınç durumunda farklı dal ve modlarda farklı tür etki göstermektedir. Bu farklılıklar Şekil 3 ile verilen sayısal sonuçlardan açıkça görülmektedir.

Elde edilen sayısal sonuçlara dayanılarak yapılan incelemeler göstermektedir ki lineer elastik malzeme çiftleri için tabakadaki çekme ön gerilmesi genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının yayılma hızını artırmakta, yarı düzlemdeki basınç ön gerilmesi ise bu hızın değerini azaltmaktadır. Kanaatimce bu sonuçlar lineer elastik malzeme türünden bağımsızdır.

## TEŞEKKÜR

Gerek bu çalışmadaki katkılarından gerekse diğer çalışmalarım esnasında karşılaştığım her türlü zorlukta yol gösteren Sayın Prof. Dr. Surkay D. Akbarov'a teşekkür ederim.

## KAYNAKLAR

- [1] Achenbach, J.D. ve Epstein, H.I., "Dynamic interaction of a layer and a half-space" I. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng 93, EM5, 24-42, 1967.
- [2] Akbarov, S. D. ve Ozaydin, O. "The effect of initial stresses on harmonic stress fields within the stratified half plane", Eur. J. Mech. A / Solids 20,385-396, 2001a.
- [3] Akbarov, S. D. ve Ozaydin, O., "On the Lamb's problem for a pre-stressed stratified half-plane", Int. Appl. Mech. 37(10), 138-142, 2001b.
- [4] Akbarov, S.D. ve Özışık, M., "The influence of the third order elastic constants to the generalized Rayleigh wave dispersion in a prestressed stratified half-plane", International Journal of Engineering Science, 41(17), 2047-2061, 2003.

*Linear Elastik ve Ön Gerilmeli Tabaka ile Örtülmüş Lineer...*

- [5] Barnett, D. M., Lothe, J., Gavazza, S. D., Musgrave, M. J. P., "Consideration of the existence of interfacial, Stoneley waves in bounded anisotropic elastic half-spaces.", *por. R. Soc. Lond.*, 1985., A402, P.153-166.
- [6] Dowaikh, M. A., Ogdem, R. W., "Interfacial waves and deformations in a pre-stressed elastic media", *IMA Y. Appl. Math.*, 1991, A443 - P. 313 – 328.
- [7] Eringen, A.C. ve E., S. Suhubi, "Elastodynamics , Volume II, Linear Theory",–Academic Press New York, 343-1001, 1975.
- [8] Guz, A.N., "Elastic Waves in the body with initial stresses. I.General theory", Kiev; Naukova Dumka , 375 sayfa, 1986a, (Rusça).
- [9] Guz, A.N. "Elastic Waves in the body with initial stresses. II. Propagation regularities", Kiev Naukova Dumka, 563 sayfa, 1986b, (Rusça).
- [10] Guz, A.N., "On foundation of nondestructive method of determination of three-axial stresses in solids", *Inter. Appl. Mech.* 37 (7), 899-905, 2001.
- [11] Guz, A.N., "Elastic Waves in bodies with Initial (Residual) Stresses", *Int. Appl. Mech.* 38 (1), 35-78, 2002.
- [12] Guz, A.N. ve Makhort, F.G., "Physical principles of ultrasonic non-destructive method of determination of stresses in rigid solids", *Int. Appl. Mech.* 36 (9), 3-34, 2000.
- [13] Özişik, M. ve Akbarov, S.D., "Longitudinal wave propagation in half-plane covered with pre-stressed layer", Eighth Annual International Conference on Composites Engineering, August 5-11, Tenerife, Canary Islands, Spain, 707-708., 2001.
- [14] Özişik, M. ve Akbarov, S.D., "Ön gerilmeli tabaka ile örtülmüş yarı düzlemde boyuna dalga yayılması", XII. Ulusal Mekanik Kongresi, 10-14 Eylül, Konya, 2001.
- [15] Özişik, M. ve Akbarov, S.D., "Rayleigh wave propagation in half-plane covered with a prestressed layer under complete and noncomplete interfacial contact", *Mechanics of Composite Materials*, June 9-13, Riga-Latvia,140, 2002.
- [16] Özişik, M. ve Akbarov, S.D., "Rayleigh wave propagation in half-plane covered with pre-stressed layer under complete and noncomplete interface contact", *Mechanics of Composite Materials*, 39 (2), 177-182, 2002.
- [17] Rogerson, G. A. , Sandiford, K. J., "The Effect of finite primary deformations on harmonic waves in layered elastic media.",*Int. J. Solid Structures* ,37(14), 2059-2087, 2000.
- [18] Tolstoy, I. and Usdin, E., "Dispersive properties of stratified elastic and liquid media. A ray theory.", *Geophysics*, 18, 844-870, 1953.