ARAŞTIRMA MAKALESİ

REEL EKSENDE VERİLMİŞ OPERATÖR KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖR DENKLEMİNİN ÖZDEĞERLERİNİN ASİMPTOTİK İFADESİ

Fatma AYDIN

Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya Metalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş Tarihi: 25.12.2002

ASYMPTOTİC EXPRESSİON OF EİGENVALUES NUMBER OF SECOND ORDER STRUM-LİOUVİLLE OPERATOR EQUATİON WİTH OPERATOR COEFFİCİENT GİVEN İN REAL AXİS

SUMMARY

Let H be a seperable Hilbert space.In seperable Hilbert space $L_2(-\infty,\infty,\mathrm{H})$,Green function of the differantial expression defined by $-y'' + Q(x)y$, $-\infty < x < \infty$ is studied and asymptotic expression of eigenvalue numbers is found,where $Q(x)$ is an operatör that is self adjoint and positive definite (for every x in $(-\infty,\infty)$) and its inverse is compact in H.

ÖZET

H ayrılabilir Hilbert uzayı olmak üzere $L_2(-\infty,\infty,\mathrm{H})$ ayrılabilir Hilbert uzayında $-y'' + Q(x)y$, $-\infty < x < \infty$ diferansiyel ifadesi ile tanımlanan operatörün Green fonksiyonu incelenmiş ve özdeğerler sayısının asimptotik ifadesi bulunmuştur.Burada $Q(x)$, $(-\infty,\infty)$'dan alınmış her x değerinde H'da kendine eş,pozitif tanımlı ve tersi kompakt operatördür.

1. GİRİŞ

H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. $H_1 = L_2(-\infty, \infty; H)$ ile Bochner anlamında ölçülebilir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_H^2 \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan f: $(-\infty,\infty) \rightarrow H$ fonksiyonlar kümesini gösterelim. Eğer H_1'e ait f(x), g(x) fonksiyonlarının iç çarpımını

$$(f,g)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x), g(x)\right)_H \, dx$$

formülü ile tanımlarsak o zaman H_1 ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur. [Yosida,1980][9]Biz bu çalışmada H_1 uzayında

$$l(y) = -y'' + Q(x)y \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

diferansiyel ifadesi ile oluşturulan L operatörünün Green fonksiyonunu inceleyeceğiz ve buna dayanarak L nin özdeğerler sayısının asimptotik davranışını bulacağız. $Q(x)$ üzerine Titchmarch – Levitan koşulları olarak bilinen aşağıdaki koşulların sağlandığı varsayılmaktadır.

1.$\forall\ x \in (-\infty,\infty)$ için $Q(x)$, H'da kendine eş operatördür. $Q(x) \geq I$ dir. (Burada I, H'da birim operatördür.)

2. $Q(x)$in tanım kümesi D($Q(x)$) x'den bağımsızdır ve D($Q(x)$)=D, $\overline{D} = H$ dir. (Burada $\overline{D}$, D kümesinin kapanışıdır).

3. x'in $(-\infty,\infty)$ ait her değerinde $Q(x)$ in tersi $Q^{-1}(x)$, H'da tam sürekli operatördür.

$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j(x)^{3/2}}$ serisi yakınsaktır ve $F(x) \in L_1(-\infty,\infty)$dur.Burada

$\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq .... \leq \alpha_n(x) \leq ...$ $Q(x)$'in özdeğerleridir. Bu özdeğerlerin $(-\infty,\infty)$ da ölçülebilirliği varsayılmaktadır.

4. $|x - \xi| \leq 1$ olduğunda

$$\left\| [Q(x) - Q(\xi)]Q^{-a}(x) \right\| \leq c|x - \xi| \qquad (c = \text{sbt} > 0) \qquad (0 < a < \tfrac{3}{2})$$

5. $|x - \xi| \leq 1$ olduğunda $\left\| Q^{\frac{1}{2}}(x).Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \leq c \right\|$ olsun.

$\mu > 0$ parametre olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan iki değişkenli $G(x,\xi;\mu)$ operatör fonksiyonuna L' nin Green fonksiyonu denir.

1) $G(x,\xi;\mu)$ H'da dönüşüm yapan x ve ξ ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < \xi < \infty$) nin sürekli operatör fonksiyonudur.

2) $x \neq \xi$ değerlerinde $G(x,\xi;\mu)$ nün ξ'ye göre birinci türevi sürekli ve

$G'_{\xi}(x, x+0;\mu) - G'_{\xi}(x, x-0;\mu) = -I$ dır.

3) $G(x,\xi;\mu)$ ξ değişkenine göre ikinci türeve sahip operatör fonksiyondur ve

$$-G''_{\xi\xi}(x,\xi;\mu) + G(x,\xi;\mu)Q(\xi) + \mu G(x,\xi;\mu) = 0 \quad (x \neq \xi) \text{ dır.}$$

Ele aldığımız L operatörünün özdeğerler sayısının asimptotik davranışının incelenmesi ilk olarak A.G.Kostyuchenko ve B.M.Levitan[8] çalışmasında ele alınmıştır.Sonraları bu çalışma [1],[2],[3],[4] ve [5] çalışmalarıyla geliştirilmiş ve genelleştirilmiştir. Biz bu çalışmada farklı yöntem kullanarak A.G.Kostyuchenko ve B.M.Levitan[6] çalışmasında yer alan(koşul 4) $Q(x)$in sonsuzda regularlık koşulundan kurtulduk.

2.GREEN FONKSİYONU İÇİN İNTEGRAL DENKLEM

$G(x,\xi;\mu)$ operatör fonksiyonunun bulunmasında Hilbert-Levy'nin parametriks yöntemini kullanacağız. Yöntem gereği $G(x,\xi;\mu)$ operatör fonksiyonunu;

$$\begin{aligned} G(x,\xi;\mu) &= r(x-\xi)\,g(x,\xi;\mu) - \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{ r(x-\eta)\,g(x,\eta;\mu)\big[Q(\eta)-Q(x)\big] \\ &\quad - r''(x-\eta)\,g(x,\eta;\mu) + 2r'(x-\eta)\frac{\partial g(x,\eta;\mu)}{\partial\eta}\Big\} G(\eta,\xi;\mu)\,d\eta \\ &= r(x-\xi)\,g(x,\xi;\mu) - \{P_1 - P_2 + P_3\}\,G(x,\xi;\mu) \end{aligned} \qquad (2)$$

integral denkleminin çözümü şeklinde arayalım.Burada $\aleph = \{Q(x) + \mu I\}^{1/2}$ olmak üzere

$$g(x,\xi;\mu) = \frac{1}{2}\aleph^{-1} e^{-|x-\xi|\aleph}$$

ve $r(x) = \begin{cases} 1, |x| < \dfrac{1}{2} \\ 0, |x| > 1 \end{cases}$ koşulunu sağlayan istenildiği kadar türeve sahip bir fonksiyondur.

Bu integral denkleminin $\mu > 0$ büyük değerlerinde çözüme sahip olduğunu ve elde edilen çözümün (1) probleminin Green fonksiyonu olduğunu göstereceğiz.(2) denklemi aşağıda tanımlanan uzaylarda gözönüne alınacaktır.

X_1 ve X_2 uzayları;

$-\infty < x, \eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış, değerleri H'da lineer sınırlı operatörler olan ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x,\eta)\|^2 \, d\eta < \infty$$

koşulunu sağlayan A(x,η) operatörler kümesini X_1 ile gösterelim. X_1 bir lineer uzay oluşturur. Bu uzayda A(x,η) nın normunu,

$$\|A(x,\eta)\|_{X_1} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x,\eta)\|^2 \, d\eta \right)^{1/2}$$

formülü ile tanımlayalım. Bu durumda X_1 bir Banach uzay olur.

X_2 ile $-\infty < x, \eta < \infty$ bölgesinde tanımlanmış, değerleri H'da dönüşüm yapan Hilbert-Schmidt (H-S) tipli ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x,\eta)\|_2^2 \, d\eta < \infty$$

koşulunu sağlayan A(x , η) operatörler kümesini gösterelim. Burada $\|A(x,\eta)\|_2$,A(x , η)'nın H-S normunu gösterir. X_2'de $A(x,\eta)$'nın normunu

$$\|A(x,\eta)\|_{X_2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \|A(x,\eta)\|_2^2 \, d\eta \right)^{1/2}$$

ile tanımlarsak X_2 uzayı da bu norma göre Banach uzayı olur. Çalışmamıza devam edebilmek için gerekli olan, H'da dönüşüm yapan sınırlı A(x , η) operatörlerinin oluşturduğu diğer $\mathbf{X_3^{(p)}}$**,** $\mathbf{X_2^{(s)}}$**,** $\mathbf{X_4^{(s)}}$ **ve** $\mathbf{X_5}$ **(**$\mathbf{p \geq 1,\ s < 0}$**)** Banach uzaylarını da kullanacağız.Bu uzayların tanımı B.M. Levitan [7] makalesinde verilmiştir. (2) integral denklemini X_1 ve X_2 uzaylarında gözönüne alalım. Biz μ > 0 büyük değerlerinde bu denklemin X_1 ve X_2 de tek çözüme sahip olduğunu ve çözümün ardışık yaklaşım yöntemi ile bulunabileceğini göstereceğiz. Bunun için μ 'nün sözü edilen değerlerinde

$r(x-\xi)\, g(x,\xi;\mu) \in X_1$, $r(x-\xi)\, g(x,\xi;\mu) \in X_2$ ve

$$PG(x,\xi;\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ r(x-\eta)\, g(x,\eta;\mu)[Q(\eta)-Q(x)] - r_x''(x-\eta)\, g(x,\eta;\mu) + 2r_x'(x-\eta) \frac{\partial g(x,\eta;\mu)}{\partial \eta} \Big\} G(\eta;\xi;\mu)\, d\eta$$

operatörünün X_1 ve X_2'de büzen dönüşüm olduğunu göstermemiz yeterlidir. Önce (2) denkleminde $r(x-\xi) g(x,\xi;\mu) \in X_2$ yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|r(x-\xi) g(x,\xi;\mu)\|_2^2 \, dx\, d\xi < \infty$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $\|r(x-\xi) g(x,\xi;\mu)\|_2^2$ nin normunu sınırlandıralım.

$g(x,\xi;\mu)$ x , ξ ve $\mu > 0$ nün herbir değerinde kendine eş operatör ve

$$\|r(x-\xi)\, g(x,\xi;\mu)\|_2^2 = \left\| r(x-\xi) \aleph^{-1} e^{-\aleph|x-\xi|} \right\|_2^2$$

olduğunu gözönüne alırsak spektral açılım formülüne göre,

$$\left\| r(x-\xi) \aleph^{-1} e^{-\aleph|x-\xi|} \right\|_2^2 \leq c^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}\,|x-\xi|}}{\sqrt{\alpha_j(x)+\mu}} \right)^2 =$$

$$c^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{\alpha_j(\mathrm{x})+\mu}\,|\mathrm{x}-\xi|}}{\alpha_j(\mathrm{x})+\mu} \text{ dir.}$$

Buradan $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\| r(\mathrm{x}-\xi)\aleph^{-1} e^{-\aleph|\mathrm{x}-\xi|} \right\|_2^2 d\mathrm{x}\, d\xi$

$$\le c^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathrm{x} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\alpha_j(\mathrm{x})\right)^{3/2}} = c^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} < \infty$$ (koşul 3'e göre) bulunur.

(2)denklemindeki $P_1 A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\mathrm{x}-\eta)\, g(\mathrm{x},\eta;\mu)\left[\mathrm{Q}(\eta)-\mathrm{Q}(\mathrm{x})\right] A(\eta,\xi) d\eta$

ifadesini aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(\mathrm{x}-\eta)\, g(\mathrm{x},\eta;\mu)\left[\mathrm{Q}(\eta)-\mathrm{Q}(\mathrm{x})\right] A(\eta,\xi) d\eta =$$

$$= \int\limits_{|x-\eta|\le 1} \mathrm{r}(x-\eta)\mathrm{g}(x,\eta;\mu)\left[Q(\eta)-Q(x)\right]\mathrm{A}(\eta,\xi)\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+ \int\limits_{|\mathrm{x}-\eta|>1} r(\mathrm{x}-\eta)\, g(\mathrm{x},\eta;\mu)\left[\mathrm{Q}(\eta)-\mathrm{Q}(\mathrm{x})\right] A(\eta,\xi)\, d\eta = a_1 + a_2$$

Burada $\|a_1\|_2^2 = \left\| \int\limits_{|\mathrm{x}-\eta|\le 1} r(\mathrm{x}-\eta)\, g(\mathrm{x},\eta;\mu)\left[\mathrm{Q}(\eta)-\mathrm{Q}(\mathrm{x})\right] A(\eta,\xi)\, d\eta \right\|_2^2$

$$\le c \left(\int\limits_{|\mathrm{x}-\eta|\le 1} \left\| g(\mathrm{x},\eta;\mu)\left[\mathrm{Q}(\eta)-\mathrm{Q}(\mathrm{x})\right] \right\| \|A(\eta,\xi)\|_2\, d\eta \right)^2 \qquad (3)$$

Biz c ile genellikle farklı sabitleri göstereceğiz. Önce integral altı ifadeyi sınırlandıralım; 4 koşulunu dikkate alırsak

$$\left\| g(\mathrm{x},\eta;\mu)\left[\mathrm{Q}(\eta)-\mathrm{Q}(\mathrm{x})\right] \right\| \le \left\| g(\mathrm{x},\eta;\mu)\mathrm{Q}^{a}(\mathrm{x}) \right\| . \left\| \mathrm{Q}^{-a}(\mathrm{x})\left[\mathrm{Q}(\eta)-\mathrm{Q}(\mathrm{x})\right] \right\|$$

$$\le c\,|\mathrm{x}-\eta|\, \left\| \mathrm{Q}^{a}(\mathrm{x})\, g(\mathrm{x},\eta;\mu) \right\|$$

bulunur. Bu durumda (3) nın sağ tarafı

$$\int_{|x-\eta|\le 1} \left(\left\|g(x,\eta;\mu)\left[Q(\eta)-Q(x)\right]\right\|\left\|A(\eta,\xi)\right\|_2 \, d\eta\right)^2$$

$$\le c\left(\int_{|x-\eta|\le 1} |x-\eta| \left\|Q^a(x)\, g(x,\eta;\mu)\right\| \left\|A(\eta,\xi)\right\|_2 \, d\eta\right)^2 \text{ şeklini alır.} \quad (4)$$

Buradan

$$\int_{|x-\eta|\le 1} |x-\eta| \left\|Q^a(x)\, g(x,\eta;\mu)\right\| . \left\|A(\eta,\xi)\right\|_2 \, d\eta$$

$$\le \frac{1}{2} \int_{|x-\eta|\le 1} |x-\eta|^{1+\varepsilon} |x-\eta|^{-\varepsilon} \left\|Q^a(x) \aleph^{-2-\varepsilon}\right\| \quad (5)$$

$$\left\|\aleph^{1+\varepsilon} e^{-\aleph|x-\eta|}\right\| . \left\|A(\eta,\xi)\right\|_2 \, d\eta$$

yazılabilir. Spektral açılım formülünü kullanarak $\left\|Q^a(x)\aleph^{-2-\varepsilon}\right\|$ normunu sınırlandıralım. Sözü edilen formüle göre

$$\left\|Q^a(x)\left(Q(x)+\mu I\right)^{\frac{1}{2}(-2-\varepsilon)}\right\| = \sup_{\lambda\ge 1} \lambda^a \, (\lambda+\mu)^{\frac{1}{2}\,(-2-\varepsilon)}$$

$$\le \sup_{\lambda\ge 1} (\lambda+\mu)^{a-\frac{(2+\varepsilon)}{2}} \quad \text{dir.}$$

$\varepsilon > 0$ iken $0 < a < \frac{3}{2}$ olduğunu gözönüne alarak $0 < \zeta < \frac{(2+\varepsilon)}{2} - a$ koşulunu

sağlayan bir ζ seçelim. Bu taktirde $\left\|Q^a(x)\aleph^{-2-\varepsilon}\right\| \le \frac{c}{\mu^\zeta}$ (6)

olur. Şimdi ise $\left\| |x-\eta|^{1+\varepsilon} \aleph^{1+\varepsilon} e^{-\aleph|x-\eta|} \right\|$ ifadesini sınırlandıralım. Biz $x \ge 0$,

$\alpha > 0$ iken $x^\alpha e^{-x}$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gözönünde bulunduracağız.

$$\left\| |x-\eta|^{1+\varepsilon} \aleph^{1+\varepsilon} e^{-\aleph|x-\eta|} \right\| =$$

$$= \sup_{\lambda\ge 1} \left(|x-\eta| \, (\lambda+\mu)^{1/2}\right)^{1+\varepsilon} e^{-(\lambda+\mu)^{1/2}|x-\eta|} < \infty \quad (7)$$

(5), (6) ve (7) den

$$\|a_1\|_2^2 \le \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\left(\int\limits_{|x-\eta|\le 1} |x-\eta|^{-\varepsilon}\,\|A(\eta,\xi)\|_2\, d\eta\right)^2 =$$

$$= \frac{c^2}{\mu^{2\zeta}}\left[\int\limits_{|x-\eta|\le 1} |x-\eta|^{-\varepsilon}\,\|A(\eta,\xi)\|_2\, d\eta \int\limits_{|x-\eta'|\le 1} \left|x-\eta'\right|^{-\varepsilon}\left\|A(\eta',\xi)\right\|_2 d\eta'\right] \qquad (8)$$

yazarsak $\|a_1\|_{X_2} \le \frac{c}{\mu^{\zeta}}\|A(x,\xi)\|_{X_2}$ olduğu bulunur. $x=\eta$ >1 iken r($x-\eta$) = 0 olduğundan a_2= 0 olur.

Benzer şekilde (2) denklemindeki P_2 ve P_3 operatörlerinin μ>0 ın büyük değerlerinde büzen operatör olduğunu gösterilebilir.

Bununla P operatörünün μ>0'ın büyük değerlerinde X_2 uzayında büzen operatör olduğunu ispatlamış olduk.

r($x-\eta$)g($x,\eta;\mu$) $\in X_2$ olduğundan (2) denkleminin μ>0 ın büyük değerlerinde X_2 uzayında çözümünün varlığını ve tekliğini gösterdik. Benzer şekilde X_1 uzayında çözümün varlığı ve tekliği gösterilebilir.Böylece aşağıdaki teorem ispatlandı

Teorem 1 : Eğer 1), 2.), 3) koşulları sağlanıyorsa o zaman μ>0 nün büyük değerlerinde, (2) denkleminin, X_1,X_2 uzaylarının her birine ait çözümü vardır ve tektir.

Aşağıdaki lemmalar ispatlanabilir.

Lemma 1: Eğer $Q(x)$ operatör fonksiyonları 1), 2), 3) koşullarını sağlıyorsa o zaman P operatörü μ>0 büyük değerlerinde $X_2^{(s)}$,$X_3^{(p)}$,$X_4^{(s)}$ uzaylarının her birinde büzen operatördür.

Biz daha önce G($x,\xi;\mu$) = r$(x-\xi)g(x,\xi;\mu)-PG(\eta,\xi;\mu)$ integral denkleminin X_2 uzayına ait olduğunu gösterdiğimizden bu lemmaya göre bu integral denklem çözüme sahiptir ve çözümde $X_1^{(s)}, X_2^{(s)}, X_3^{(s)}, X_4^{(s)}$ uzaylarına ait olacaktır.

Lemma 2: $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1., 2., 3. koşullarını sağlasın ve ek olarak

$|x-\xi|\le 1$ iken $\left\|Q^{\frac{1}{2}}(x)Q^{-\frac{1}{2}}(\xi)\right\|\le c$ olsun. Bu takdirde;

$$\frac{\partial^2[r(x-\xi)g(x,\xi;\mu)]}{\partial\xi^2} \in X_4^{(-\frac{1}{2})} \qquad x\ne\xi$$

Yani $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{\partial^2(rg)}{\partial\xi^2}\,Q^{-1/2}(\xi)\right\| d\xi<\infty$ olur.

3 . GREEN FONKSİYONUNUN BİRİNCİ TÜREVİ

(2) denkleminin ξ değişkenine göre formal türevini alalım.

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(x,\xi;\mu)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\, r(x-\xi)g(x,\xi;\mu)\,\right]-$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{r(x-\eta)g(x,\eta;\mu)\,[Q(\eta)-Q(x)]-r''(x-\eta)g(x,\eta;\mu)$$

$$+2r'(x-\eta)\Big\}\frac{\partial G(\eta,\xi;\mu)}{\partial \xi} \tag{9}$$

$X_3^{(P)}$ $(p\geq 1)$ Banach uzayında aşağıdaki integral denklemi göz önüne alalım.

$$K(x,\xi;\mu)=\frac{\partial}{\partial \xi}(rg)-\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{ r(x-\eta)g(x,\eta;\mu)[Q(\eta)-Q(x)]-r''(x-\eta)g(x,\eta;\mu)$$

$$+2r'(x-\eta)\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}\Big\}K(\eta,\xi;\mu)\,d\eta \tag{10}$$

$\frac{\partial}{\partial \xi}(r(x-\xi)\,g(x,\xi;\mu)) \in X_3^{(P)}$ olması için $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\| \frac{\partial}{\partial \xi}(rg)\right\|^{P} d\xi<\infty$

olduğunu göstermeliyiz.Bunun için $\frac{\partial}{\partial \xi}(rg) \in X_3^{(1)} \equiv X_3$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\xi < x$ olduğunu varsayalım. ($x<\xi$) içinde benzer şekilde incelenir.

$$\int_{-\infty}^{\xi} K(x,\xi;\mu)d\xi = rg(x,\xi;\mu)-\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{r(x-\eta)\,g(x,\eta;\mu)\,[Q(\eta)-Q(x)]$$

$$-r''(x-\eta)g(x,\eta;\mu)+2r'(x-\eta)\frac{\partial g(x,\eta,\mu)}{\partial \eta}\Big\}K(\eta,\xi;\mu)d\eta \tag{11}$$

(11) denklemi (2) ile aynı olur. (2) denklemi tek çözüme sahip olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\xi} K(x,\xi;\mu)\,d\xi = G(x,\xi;\mu) \tag{12}$$

olur. $\xi \neq x$ için $K(x,\xi;\mu)$ operatör fonksiyonu sürekli ise yani

$\left\| K(x,\xi+h;\mu)-K(x,\xi;\mu)\right\| \to 0$ $(h\to 0)$ iken oluyorsa (12) eşitliğinin türevini alarak $K(x,\xi;\mu)=\frac{\partial G}{\partial \xi}(x,\xi;\mu)$ bulunur.

Şimdi K($x,\xi;\mu$)operatör fonksiyonunun sürekliliğini inceleyelim. (10) denklemini aşağıdaki şekilde ifade edelim.

$$K(x,\xi;\mu)-\frac{\partial(rg)}{\partial\xi}=-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ rg(x,\eta;\mu)\left[Q(\eta)-Q(x)\right]-r''(x,\eta;\mu)g(x,\eta;\mu)+\right.$$

$$\left.+2r'g'(x,\eta;\mu)\right\}\frac{\partial rg}{\partial\xi}(\eta,\xi,\mu)d\eta-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ rg(x,\eta;\mu)\left[Q(\eta)-Q(x)\right]\right.$$

$$\left.-r''g(x,\eta;\mu)+2r'g'(x,\eta;\mu)\right\}K(\eta,\xi;\mu)-\frac{\partial rg}{\partial\xi}(\eta,\xi;\mu)\Big\}d\eta \qquad (13)$$

$$L(x,\xi;\mu)=K(x,\xi;\mu)-\frac{\partial rg}{\partial\xi}(x,\xi;\mu)$$

$$l(x,\xi;\mu)=-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ rg(x,\eta;\mu)\left[Q(\eta)-Q(x)\right]-r''g(x,\eta;\mu)+\right.$$

$\left.2r'g'(x,\eta;\mu)\right\}\frac{\partial rg}{\partial\xi}(\eta,\xi;\mu)\,d\eta$ ile gösterelim.Bu sembollerle (13) denklemi

$$L(x,\xi;\mu)=l(x,\xi;\mu)-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ rg(x,\eta;\mu)\left[Q(\eta)-Q(x)\right]-r''g(x,\eta;\mu)\right.$$

$$\left.+2r'g'(x,\eta;\mu)\right\}L(\eta,\xi;\mu)\,d\eta \qquad (14)$$

şeklini alır ve buradan

$$\Delta L(x,\xi;\mu)=\Delta l(x,\xi;\mu)-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ rg(x,\eta;\mu)\left[Q(\eta)-Q(x)\right]-r''g(x,\eta;\mu)\right.$$

$$\left.+2r'g'(x,\eta;\mu)\right\}\Delta L(\eta,\xi;\mu)\,d\eta \qquad (15)$$

elde edilir. Burada

$\Delta L(x,\xi;\mu)=l(x,\xi+h;\mu)-l(x,\xi;\mu)$

$\Delta l(x,\xi;\mu)=l(x,\xi+h;\mu)-l(x,\xi;\mu)$ dir.(15) denklemini

$$\Delta L=\Delta l-P(\Delta L) \qquad (16)$$

şeklinde yazalım. Lemma 4'de olduğu gibi P operatörü $\mu>0$ büyük değerlerinde X_5 uzayında da büzen operatör olduğu gösterilir.Buna göre $(I+P)^{-1}$ var ve sınırlıdır.

$\left\|(I+P)^{-1}\right\|_{X_5}=A$ olsun. (16) denkleminden $\left\|\Delta L\right\|_{X_5}\leq A\left\|\Delta L\right\|_{X_5}$ (17)

bulunur.Aşağıdaki lemma ispatlanabilir.

Lemma 3: $\forall\ \varepsilon>0$ için öyle $\delta>0$ vardır ki, $|h|<\delta$ olduğunda

$\left\|L(x,\xi+h;\mu)-L(x,\xi;\mu)\right\|_{X_5}<\varepsilon$ olur.

Burada $\frac{\partial rg}{\partial \xi}(x,\xi;\mu)$ fonksiyonunun x= ξ noktasında hangi sıçrayışa sahipse $\frac{\partial G}{\partial \xi}(x,\xi;\mu)$ de aynı sıçrayışa sahip olduğu görülmektedir.

Lemma 3'ün yardımı ile,

$$\sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ h\to 0}} \sup_{-\infty<\xi<\infty} \left\| \left[r\frac{\partial rg}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial rg}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + I \right] \aleph^{-2} \right\|_H \to 0 \tag{20}$$

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \sup_{-\infty<\xi<\infty} \left\| \left[r\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + I \right] \aleph^{-2} \right\|_H \to 0 \tag{21}$$

($h \to 0$) olduğu ispatlanır. $f \in D = (Q(x))$ olsun.f elemanının $(Q(x)+\mu I)$ operatörünün tanım kümesine ait olduğu bellidir. $Q(x)+\mu I$ operatörü f fonksiyonuna uyguladığında $(Q(x)+\mu I)f = g$ olsun. Bu durumda $Q(x)+\mu I$ nın tersi olduğundan ;

$f = \aleph^{-2} g$ (22)olur. (21) den

$$\left\| \left[\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + I \right] f \right\| \le$$

$$\left\| \left[\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+h} - \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-h} + I \right] \aleph^{-2} \right\|_H \|g(x)\|_H \le \varepsilon \|g(x)\|_H$$

elde edilir. Böylece, $x = \xi$ sıçrama noktasında sıçrayışının $-f$ 'e eşit olduğunu yani;

$$G'_{\xi}(x, x+0;\mu) - G'_{\xi}(x, x-0;\mu) = -I \tag{23}$$

olduğu görülür.Bununla $G_{\xi}(x,\xi;\mu)$ operatör fonksiyonunun $x = \xi$ noktasında sıçrayışa sahip olduğunu görmüş olduk.

4.GREEN FONKSİYONUNUN İKİNCİ TÜREVİ

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial rg}{\partial \xi} - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} \frac{\partial G}{\partial \xi}(\eta,\xi;\mu)\, d\eta \tag{24}$$

ifadesini

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}-\frac{\partial rg}{\partial \xi}=-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\right\}\frac{\partial G}{\partial \xi}(\eta,\xi;\mu)\,d\eta$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\right\}\left[\frac{\partial G}{\partial \xi}-\frac{\partial rg}{\partial \xi}\right]d\eta \qquad (25)$$

şeklinde yazalım.

$$L(x,\xi;\mu)=\frac{\partial G}{\partial \xi}-\frac{\partial rg}{\partial \xi}$$

$$l(x,\xi;\mu)=-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\right\}\frac{\partial rg}{\partial \xi}(\eta,\xi;\mu)\,d\eta$$

olmak üzere (25) denklemi

$$L(x,\xi;\mu)=l(x,\xi;\mu)-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\right\}L(\eta,\xi;\mu)\,d\eta$$

halini alır.Bu denklemin ξ 'ye göre türevini alalım;

$$\frac{\partial L}{\partial \xi}=\frac{\partial l}{\partial \xi}-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\right\}\frac{\partial L}{\partial \xi}(\eta,\xi;\mu)\,d\eta$$ bulunur.

$$\frac{\partial rg}{\partial \xi}(x,x+0;\mu)-\frac{\partial rg}{\partial \xi}(x,x-0;\mu)=-I$$ göz önüne alarak,

$$\frac{\partial l}{\partial \xi}=\left\{rg[Q(\xi)-Q(x)]-r''g+2r'g'\right\}-$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\right\}\frac{\partial^2 rg}{\partial \xi^2}\,d\eta=l_1(x,\xi;\mu)$$

bulunur. $l_1\in X_4^{(-1/2)}$ uzayına ait olduğunu göstererek Lemma 4'e göre aşağıdaki denklemin $X_4^{(-1/4)}$ uzayına ait ve tek çözümünün olduğunu göstermiş olduk.

$$M(x,\xi;\mu)=l_1(x,\xi;\mu)-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\right\}M(\eta,\xi;\mu)d\eta \qquad (26)$$

Şimdi (26) denklemin $f\in D\{Q(x)\}$ olduğunda çözümün $\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right)(f)=M(f)\quad(\eta\neq\xi)$ denkleminin sağladığını gösterelim. $f\in D\{Q(x)\}$ olduğunda (26) denklemi;

$$M(f) = l_1(f) - \int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} M(f)d\eta$$

olur. Bu ifadenin ξ_0 ‘dan ξ ’ye kadar integralini alalım.

$$\int_{\xi_0}^{\xi} M(x,\xi;\mu)(f)d\xi = \int_{\xi_0}^{\xi} l_1(x,\xi;\mu)(f)d\xi -$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g'\} \left\{ \int_{\xi_0}^{\xi} M(\eta,\xi;\mu)(f)d\xi - \right\} d\eta$$

Buradan ; $[L(x,\xi;\mu) - L(x,\xi_0;\mu)](f) = [l(x,\xi;\mu) - l(x,\xi_0;\mu)](f)$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g' \right\} [L(\eta,\xi,\mu) - L(\eta,\xi_0,\mu)] f d\eta \qquad (27)$$

bulunur. Burada B.M.Levitanda[7] olduğu gibi işlemler yapılırsa $x \neq \xi$ iken $\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}$ nin varlığı ve $X_4^{-1/2}$ uzayına ait olduğu görülür.

5. GREEN FONKSİYONUNUN DENKLEMİ SAĞLAMASI

$x \neq \xi$ için $G(x,\xi;\mu)$ Green fonksiyonunun

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = G(x,\xi;\mu)[Q(\xi) + \mu I] \qquad (28)$$

denklemini sağladığını gösterelim:

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial\ (rg)}{\partial \xi} - \int_{-\infty}^{\infty} \left[rg[Q(\eta) - Q(x)] - r''g + 2r'g' \right] \frac{\partial G}{\partial \xi}(\eta,\xi;\mu)d\eta$$

denkleminin ξ ’ye göre türevini alırsak:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 (rg)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial K}{\partial \xi} \qquad (29)$$ olur. Buradan; $\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = rg(Q(\xi) + \mu I)$

olur. Buradan; $\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = rg(Q(\xi) + \mu I)$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{rg(Q(\eta)-Q(x))-r''g+2r'g'\right\}\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}(\eta,\xi,\mu)d\eta$$

$f\in D$ için; $\dfrac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}(f)=(Q(\xi)+\mu I)(f)$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\right\}\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}(\eta,\xi,\mu)(f)d\eta \qquad (30)$$

elde edilir. $[Q(\xi)+\mu I]f=\alpha$ olsun. Buna göre (30)'ü

$$\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}(f)=[Q(\xi)+\mu I]^{-1}\alpha=rg(x,\xi,\mu)\alpha$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{rg[Q(\eta)-Q(x)]-r''g+2r'g'\right\}\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}(f)[Q(\xi)+\mu I]^{-1}\alpha\ \ d\eta \qquad (31)$$

şeklinde yazıp (2) denklemi ile karşılaştırırsak ve (2) denkleminin tek çözüme sahip olduğunu göz önüne alırsak,

$\dfrac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}(f)=[Q(\xi)+\mu I]^{-1}\alpha=G(x,\xi;\mu)\alpha$ yı elde ederiz. $(Q(\xi)+\mu I)^{-1}\alpha=f$

ve $\alpha=(Q(\xi)+\mu I)f$ olduğu son ifadede göz önüne alırsak

$$\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}(f)=G(x,\xi,\mu)[Q(\xi)+\mu I]f \qquad (32)$$

olur.Burada her bir $\xi>0$ için f elemanlar kümesi H'da yoğun olduğundan (32) den

$-\dfrac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}(\eta,\xi,\mu)G(x,\xi;\mu)[Q(\xi)+\mu I]=0 \qquad (x\neq\xi)$ (33) bulunur.

6. GREEN FONKSİYONUNUN SİMETRİKLİĞİ

Green fonksiyonu G(x, ξ ; μ) nün simetrikliğini, yani $G^*(x,\xi;\mu)=G(\xi,x;\mu)$ olduğunu gösterelim. (33) denkleminin her iki yanının H'da iç çarpıma göre eşleniğini alırsak

$-\dfrac{\partial^2 G^*(x,\xi;\mu)}{\partial\xi^2}+[Q(\xi)+\mu I]G^*(x,\xi;\mu)=0$ olur.

$-\dfrac{\partial^2 G^*(x,\xi;\mu)}{\partial\xi^2}\in X_4^{(-\frac{1}{2})}$ yani

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial^2 G^*(x,\xi;\mu)}{\partial \xi^2} Q^{-\frac{1}{2}}(\xi) \right\| d\xi < \infty \tag{34}$$

(Lemma 4) olduğunu göstermiştir.[Levitan[1968] çalışmasında olduğu gibi işlemler yapılırsa;

$G^*(x,\xi;\mu) = G(\xi,x;\mu)$ (35) olduğu çıkar.

7. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ SAYISININ ASİMPTOTİK İFADESİ

$G(x,\xi;\mu)$ L operatörünün Green fonksiyonu olduğundan dolayı

$$\psi_n(x) = (\lambda_n + \mu) \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;\mu)\psi_n(\xi)d\xi \tag{36}$$

şeklinde yazılır. Burada $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ....\lambda_n \le .....$ L operatörünün özdeğerleri, $\psi_1(x), \psi_2(x),......\psi_n(x),.......$ ise bu özdeğerlere karşılık gelen ortanormal özfonksiyonlardır.P operatörü $\mu > 0$ ın büyük değerlerinde büzen olduğndan $\mu \to \infty$ iken

$$G(x,\xi;\mu) = r(x-\xi)g(x,\xi;\mu)[1 + o(1)] \tag{37}$$

şeklinde yazabiliriz.Burada $o(1)$ $\mu \to \infty$ iken normu (x,ξ) değişkenlerine göre sıfıra düzgün yakınsayan operatör değerli bir fonksiyondur. (36) , (37)' de göz önünde bulundurulur ise , $\mu \to \infty$ iken

$$\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n + \mu} \sim \int_{-\infty}^{\infty} r(x-\xi)g(x,\xi;\mu)\psi_n(\xi)d\xi \tag{38}$$

olur. Buradan [Kosyuchenko A.G. ve Levitan B.M.] çalışmasına göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \mu} \sim \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\alpha_j(x) + \mu)^{\frac{3}{2}}} \tag{39}$$

olarak bulunur. [Titchmarsh,1958,b.XVII] göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{(\lambda + \mu)^3} \tag{40}$$

dir.Burada $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$ $,(\lambda > 0)$ λ sayısından küçük kalan $\{\lambda_n\}$ özdeğerler sayısıdır. (39)'ı (40) da göz önüne alırsak;

$$\int_0^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{(\lambda + \mu)^3} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\alpha_j(x) + \mu)^{\frac{3}{2}}} \tag{41}$$

olur.

Bu eşitlikten $N(\lambda)$ nın asimptotik ifadesini bulmak için Titchmarsh'ın Tauber tipli teoremini kullanacağız.[Titchmarsh,1958,b. XXII][8] Bunun için $Q(x)$ operatör fonksiyonunun $\alpha_i(x) \quad (i = 1,2,...)$ öz değerleri üzerine aşağıdaki koşulları eklememiz gerekir. [Kostyuchenko ve Levitan,1967] [6] t>0

$$\frac{c_1}{t^{3/2}} \sum_i \int_{\alpha_i(x) \le t} dt \le \sum_j \int_{\alpha_j(x) \ge t} dt \le \frac{c_2}{t^{3/2}} \sum_i \int_{\alpha_j(x) \le t} dt$$

olacak şekilde c_1, c_2 sabitlerinin olduğunu varsayalım. Bu taktirde sözü edilen Tauber tipli teoreme göre (40)'dan

$$\lambda \to \infty \text{ iken} \qquad N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \sum_j \int_{\alpha_j(x) < \lambda} \{\lambda - \alpha_j(x)\}^{\frac{1}{2}} dx$$

asimptotik formülü elde edilir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamdaki değerli katkılarından dolayı Sayın Prof.Dr.Mehmet Bayramoğlu'na ve Sayın Yard.Doç.Dr. İnci Albayrak'a teşekkür ederim.

KAYNAKLAR

[1] Aslanov, G. I., "2n. mertebeden operatör-diferansiyel denklemlerin öz değerinin dağılımı üzerine", DAN, Azerb. SSK, No 6, 7-11, 1985(Rusça).

[2] Bayramoğlu, M., "Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimptotik davranışı". "Fonksiyonel analiz ve uygulamaları" Sbornik, Bakü: Bilim, 144-166, 1971(R).

[3] Bayramoğlu, M.,"On Asymptotics Of The Weighted Trace Of Strum-Liouville Operator Equation On The Half Axis With Boundary Condition Which Contains Operator ", "Spectral Theory Of The Operators And Its Applications", XI ISSUE, Baku, 14-44, (1997) (R).

[4] Bayramoğlu, M., ve Öztürk Uslu, S., "Sonlu Aralıkta Strum-Liouville Operator Denkleminin Spektrumunun İncelenmesi", YTÜD, 2000/4, 134-147,2000.

[5] Boymatov,K.Kh., "Operator Diferansiyel Operator Spektrumunun Asimptotiği" , Usp . matem.nauk, V.28, 4, 207-208, 1973 (R).

[6] Kostyuchenko, A.G. and Levitan,B.M.," Asymptotic Behaviour Of The Eigenvalues Of The Strum-Liouville Operator Problem" ,Funct. Analysis Appl.1, 75-93 ,1967.

[7] Levitan,B.M., "Operatör Katsayılı Strum-Liouville Probleminin Green Fonksiyonunun İncelenmesi",Mat.Sb.76(118), No: 2, 239-270, 1968(R).

[8] Titchmarsh,E.C.,"Eigenfunctions Expansions Associated With Second Order Differantial Equations ", 2nd ed., Vol.I.,Oxford Univ.Press,London ,1958.

[9] Yosida ,K., Functional Analysis,Berlin-Göttingen –Heidelberg:Springer-Verlag, 1980.