Sigma 2003/1

ARAŞTIRMA MAKALESİ

SONLU ŞEKİL DEĞİŞTİRME YAPAN KABUKLARIN KARŞILAŞTIRMA YÜZEYLERİNİN TANIMI ÜZERİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

R. Faruk YÜKSELER

Yıldız Teknik Üniversitesi , İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yıldız-İSTANBUL

Geliş Tarihi: 30.09.2002

A NEW APPROACH ON THE DEFINITION OF REFERENCE SURFACES OF SHELLS UNDERGOING FINITE DEFORMATIONS

SUMMARY

A new definition for the reference surface of deformed shells undergoing finite deformations is made. This definition is compared with those definitions which have been proposed by other researchers previously on the problem of finite expansion of spherical shells numerically.

ÖZET

Sonlu şekil değiştirme yapan kabuklarda, şekil değiştirmiş kabuğun karşılaştırma yüzeyi için yeni bir tanım yapılmıştır. Bu tanımın diğer araştırmacıların daha önce önermiş olduğu tanımlarla karşılaştırılması, sonlu genleşen küresel kabuk problemi üzerinde sayısal olarak yapılmıştır.

1. GİRİŞ

Şekil değiştirmemiş bir kabuğun orta yüzeyi, şekil değiştirmemiş kabuğun karşılaştırma yüzeyi olarak alınmaktadır. Sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapan şekil değiştirmiş bir dönel kabuğun karşılaştırma yüzeyi için iki tanım bu çalışma öncesinde önerilmişdi [1-3] :

(i) Teori II : Şekil değiştirmiş bir kabuğun karşılaştırma yüzeyi, şekil değiştirmemiş kabuğun karşılaştırma yüzeyi üzerinde bulunan noktalardan meydana gelmektedir [4,5] ve dolayısıyla

$$\xi_{II}\big|_{\xi_0=0} = 0 \quad . \tag{1}$$

Burada ξ_0 şekil değiştirmemiş kabuğun bir noktasının enine koordinatını (Şekil 1'den görülebileceği gibi; şekil değiştirmemiş kabuğun bir noktasının, karşılaştırma yüzeyi S_0'a dik uzaklığını), ξ_{II} şekil değiştirmiş kabuğun bir noktasının Teori II'ye göre enine koordinatını göstermektedir (Şekil 1'e bakıldığında, ξ_{II}'nin Teori II'ye göre karşılaştırma yüzeyi S_{II}'ye genelde dik olmadığı görülebilmektedir.). 0 indisi şekil değiştirmemiş kabuğa ait parametreler için, II indisi ise Teori II'ye karşı gelen parametreler için kullanılmaktadır. İlgili kaynakların çoğunluğunda, Teori II kullanılmıştır [4-8].

(ii) Teori I : Şekil değiştirmiş kabuğun karşılaştırma yüzeyi S_I'in şekil değiştirmemiş kabuğun karşılaştırma yüzeyi S_0 üzerinde bulunan noktalardan meydana gelmesi gerekmemektedir ve

$$\int_{-t/2}^{t/2} \xi_I \, d\xi_0 = 0 \qquad (2)$$

denklemi sağlanmalıdır [1,9]. Burada, t şekil değiştirmemiş kabuğun kalınlığıdır. I indisi Teori I'e karşı gelen parametreler için kullanılmaktadır. Bazı kaynaklarda, Teori I tercih edilmiştir [10,11].

Çeşitli problemler üzerinde, ilgili teorilere (Teori I ve Teori II'ye) karşı gelen sonuçların karşılaştırmaları yapılmıştır [1,2,3,4,12,13,14]. Sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapan dönel kabuklarla ilgili problemlerin çözümlerinde, söz konusu iki farklı teorinin kullanılması dolayısıyla oluşan farkları etkileyen parametreler bu araştırma projesinin bir uzantısı olarak elde edilmiş ve [15]'de sunulmuştur. İlgili çalışma sonucunda; kabuk kalınlığı arttıkça, eğilme etkileri arttıkça, karşılaştırma yüzeyi üzerindeki germeler[1] azaldıkça Teori I ve Teori II'ye karşı gelen sonuçlar arasındaki farkların arttığı anlaşılmıştır.

(2) denklemiyle tanımlanan Teori I'e karşı gelen yüzey, şekil değiştirmiş bir plağın kütle yüzeyidir ve eğriliği göreceli olarak küçük bir kabuğun şekil değiştirmiş durumunun kütle yüzeyine "yakındır"[3]. Bu araştırma projesinin yürütücüsü; [2] ve [3]'deki sonuçlardan, herhangi bir eğriliğe sahip kabuğun şekil değiştirmiş durumunun kütle yüzeyinin karşılaştırma yüzeyi olarak seçilmesiyle (ki bundan sonra Teori Ia olarak isimlendirilecektir), sonlu şekil değiştirme yapan kabukların analizinde bir ilerleme sağlanabileceği izlenimini edinmiştir.

Şekil değiştirmiş bir kabuğun karşılaştırma yüzeylerinin tanımlarını veren teorilerin doğruluk derecelerinin, üç boyutlu elastisiteye karşı gelen sonuçlarla karşılaştırmalar sonrasında anlaşılabileceği düşünülmüştü. Ancak, şekil değiştirmiş kabuğun söz konusu karşılaştırma yüzeylerine karşı gelen kesit etkilerinin "göreceli" olduğu bu çalışma sırasında anlaşılmıştır. Bir başka deyişle, ilgili kesit etkileri seçilen teoriye karşı gelen karşılaştırma yüzeyine göredir ve [15]'de de belirtilmiş olduğu gibi ilgili teorilerin biribirlerine göre üstünlükleri hakkında bir yorum yapmak anlamlı olmamaktadır. Ancak; [10]'da olduğu gibi, şekil değiştirmiş kabuğun karşılaştırma yüzeyi ile ilgili yaklaşımın iki boyutlu kabuk denklemlerinin üretilmesi sırasında bir avantaj sağlayabilmesi, konuyla ilgili önemli bir kriter olarak düşünülebilir.

Teori Ia, Bölüm 2'de sunulmuştur. Sonlu genleşen küresel kabuk probleminde, bahsedilen teorilere (Teori II, Teori I ve Teori Ia'ya) karşı gelen yüzeylerle ilgili kinematik ifadeler Bölüm 3'de, kesit tesirlerinin bulunması ile ilgili ifadeler Bölüm 4'de sunulmuştur. Bölüm 5, sonlu genleşen, çeşitli kalınlıklara sahip küresel kabuklarda oluşan kesit etkilerinin (bahsedilen teoriler yardımıyla) sayısal olarak bulunmasını ve ilgili sonuçların karşılaştırmalı olarak sunulmasını içermektedir. Bölüm 6'da, genel bir değerlendirme yer almaktadır.

2. TEORİ Ia

Şekil değiştirmiş kabuğun karşılaştırma yüzeyinden herhangi bir ξ uzaklığındaki[2] bir kabuk noktasındaki diferansiyel kütle dm'nin karşılaştırma yüzeyine göre birinci

---

1 Germe = Birim Uzama Oranı + 1

2 Bir parametrede bahsedilen teorilerden birisi ile ilgili bir indisin kullanılmaması durumu, ilgili parametrenin bahsedilen teorilerden herhangi birine ait olabileceği anlamındadır.

momentinin $\xi \cos\gamma \, dm$ olduğu Şekil 1 yardımıyla anlaşılabilmektedir. Burada, γ karşılaştırma yüzeyi üzerindeki enine kayma açısıdır (Şekil değişimi öncesinde şekil değiştirmemiş kabuğun karşılaştırma yüzeyine dik bir doğru üzerinde bulunan noktaların, şekil değişimi sırasında bir doğru üzerinde kaldıkları varsayılmaktadır. Bu doğrunun, karşılaştırma yüzeyine dik olması gerekmemektedir [1-4].). Kütlenin korunumundan ve malzemenin homojen olduğu varsayımıyla, şekil değiştirmiş kabuk kütlesinin karşılaştırma yüzeyine göre toplam birinci momenti T

$$T=\rho_0 \iiint \xi \cos\gamma \; ds_{\varphi 0} ds_{\theta 0} \tag{3}$$

olarak elde edilebilir [16,17]. Burada, ρ_0 şekil değiştirmemiş kabuğun kütle yoğunluğu ; $ds_{\varphi 0}$ ve $ds_{\theta 0}$ şekil değiştirmemiş kabukta düşünülen diferansiyel bir kesimde S_0'dan ξ_0 uzaklığında, $d\xi_0$ kalınlığındaki bir elemanın meridyen ve paralel çembere paralel diferansiyel yay uzunluklarıdırlar. Bir cismin kütle merkezi tanımına benzer olarak, şekil değiştirmiş bir dönel kabuğun kütle yüzeyi (3) denklemi yardımıyla

$$\int_{-t/2}^{t/2} \xi_{Ia} (1+\xi_0 k_{\varphi 0})(1+\xi_0 k_{\theta 0}) \, d\xi_0 = 0 \tag{4}$$

şeklinde ifade edilebilir (Teori Ia). Burada, $k_{\varphi 0}$ ve $k_{\theta 0}$ sırasıyla S_0'daki meridyenel ve enine eğriliklerdir [3,18]. Ia indisi, Teori Ia'ya karşı gelen parametreler için kullanılmaktadır. Eğriliklerin sıfır olması durumunda, Teori Ia'nın Teori I ile çakıştığı (2) ve (4) denklemlerinden görülebilmektedir.

Teori Ia'ya karşı gelen germe

$$\lambda_{Ia} = ds_{Ia} / ds_0 \tag{5}$$

şeklinde tanımlanacaktır. Burada; ds_{Ia} şekil değiştirmiş kabukta Teori Ia'ya karşı gelen yüzey üzerindeki diferansiyel uzunluğu, ds_0 şekil değiştirmemiş kabuğun kütle yüzeyi üzerindeki diferansiyel uzunluğu göstermektedirler.

3. SONLU GENLEŞEN KÜRESEL KABUK PROBLEMİNDE KİNEMATİK DENKLEMLER

Bu bölümde; sonlu genleşen küresel kabuk probleminde Teori II, Teori I ve Teori Ia'ya göre tanımlanan enine koordinatların, şekil değiştirmemiş küresel kabukta tanımlanan enine koordinat, bir kalınlık parametresi ve germeler cinsinden elde edilişi sunulmaktadır. Ayrıca; Teori I ve Teori Ia'ya karşı gelen germelerin, Teori II'ye karşı gelen germe ve bir kalınlık parametresi cinsinden elde edilmesinden bahsedilmektedir.

3.1. Teori II'ye karşı gelen kinematik ifade

Dönel simetrik, sonlu şekil değiştirme yapan bir dönel kabukta, Green şekil değiştirme tansörünün fiziksel bileşenlerinin değişmezleri

$$\begin{aligned} I_1 &= G_\varphi + G_\theta + G_\Gamma + G_z \,, \\ I_2 &= G_\varphi G_\theta + G_\Gamma G_\theta + G_z G_\varphi + G_\theta G_z \,, \\ I_3 &= G_\varphi G_\theta G_z \end{aligned} \tag{6}$$

şeklindedir [3]. Burada,

$$G_\varphi = (\bar{\lambda}_\varphi + \bar{k}_\varphi \xi)^2/(1+k_{\varphi 0}\xi_0)^2, \quad G_\theta = (\lambda_\theta + \overline{k_\theta}\,\xi)^2/(1+k_{\theta 0}\xi_0)^2,$$

$$G_\Gamma = \eta^2/(1+k_{\varphi 0}\xi_0)^2, \quad G_z = (\partial\xi/\partial\xi_0)^2 \tag{7}$$

ve

$$\lambda_\varphi = ds_\varphi/ds_{\varphi 0}, \quad \bar{\lambda}_\varphi = \lambda_\varphi \cos\gamma, \quad \lambda_\theta = r/r_0, \quad \eta = \lambda_\varphi \sin\gamma,$$

$$k_{\varphi 0} = d\varphi_0/ds_{\varphi 0}, \quad k_{\theta 0} = \sin\varphi_0/r_0, \quad k_\varphi = d\varphi/ds_0, \quad k_\theta = \sin\varphi/r_0, \tag{8}$$

$$\bar{k}_\varphi = k_\varphi + d\gamma/ds_{\varphi 0}, \quad \bar{k}_\theta = \sin\alpha/r_0, \quad \alpha = \varphi + \gamma .$$

s_φ, S üzerindeki meridyen yay uzunluğunu; λ_φ ve λ_θ, S üzerindeki germeleri; η enine kayma şekil değiştirme ölçüsünü; φ karşılaştırma yüzeyinin normali ile dönme ekseni arasındaki açıyı; r , S üzerindeki bir noktanın radyal koordinatını göstermektedirler.
Sonlu genleşen küresel kabuk probleminde,

$$\gamma = 0, \quad \lambda_\varphi = \lambda_\theta = \lambda = R/R_0, \quad k_{\varphi 0} = k_{\theta 0} = k = k_\varphi = k_\theta = 1/R_0 \tag{9}$$

olmaktadır[3]. Burada, R_0 ve R sırasıyla şekil değişimi öncesi ve sonrasındaki karşılaştırma yüzeylerinin yarıçaplarıdır. (9_2) denklemindeki λ , Teori I ve Teori II için geçerlidir. Teori Ia ile ilgili germe λ_{Ia} 3.2 alt bölümünde verilecektir.
Malzemenin sıkışmaz olduğu varsayımı dolayısıyla, üçüncü değişmez 1'e eşit olmalıdır [19] :

$$I_3 = 1 \tag{10}$$

(10) koşulu,

$$(\xi_0^*, \xi^*) = (2/t)(\xi_0, \xi), \quad k^* = R_0 k = 1, \quad \varepsilon = t/(2R_0) \tag{11}$$

ifadeleri ve (6,7,9,11) denklemleriyle

$$(\lambda + \varepsilon\xi^*)^2 (\partial\xi^*/\partial\xi_0^*) = (1+\varepsilon\xi_0^*)^2 \tag{12}$$

şeklinde boyutsuz olarak yazılabilir. Burada, ε bir kalınlık parametresidir. (12) diferansiyel dekleminin çözümünden

$$a\,\xi^{*3} + b\,\xi^{*2} + c\,\xi^* + d = 0 \tag{13}$$

elde edilebilir. Burada,

$$a = \varepsilon^2/3, \quad b = \varepsilon\lambda, \quad c = \lambda^2, \quad d = -\xi_0^* - \varepsilon\xi_0^{*2} - \varepsilon^2\xi_0^{*3}/3 - e . \tag{14}$$

e integral artığıdır. Teori II'nin kullanılması durumunda sağlanması gereken (1) koşulunun e = 0 seçimiyle sağlandığı görülebilir. (14) denkleminin kökleri

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 \tag{15}$$

nin işaretine bağlıdır [20]. Burada,

$$p = c/a - b^2/(3a^2), \quad q = d/a - bc/(3a)^2 + 2b^3/(27a^3) \tag{16}$$

---

[3] k_φ ve k_θ 'nın , (8) denklemlerindeki tanımları dolayısıyla şekil değişimi sonrasındaki eğriliklere eşit olmadıklarına dikkat edilmelidir.

p'nin bu problemde sıfıra eşit olduğu $(14,16_1)$ deklemlerinden görülebilir. Dolayısıyla, (15) dekleminden Δ'nın her zaman pozitiv olduğu anlaşılabilir. Bu durumda, ξ_{II}'nin gerçel kökü [20]

$$\xi^*_{II} = m^{1/3} + n^{1/3} - b/3a \tag{17}$$

Burada,

$$m = -q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}, \quad n = -q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27} \tag{18}$$

(14,16,17,18) denklemlerinden

$$\xi^*_{II} = [\{(1+\varepsilon\xi^*_0)^3 + \lambda^3_{II} - 1\}^{1/3} - \lambda_{II}]/\varepsilon \tag{19}$$

elde edilebilir. Bu sonuç, Teori II'nin kullanıldığı [6] numaralı kaynaktaki (6.5) denklemiyle (gösteriliş farklılığı dışında) aynıdır. Elastisite teorisinin doğrudan kullanılmasıyla da aynı sonuç elde edilebilmektedir [21].

3.2. Teori I ve Teori Ia'ya Karşı Gelen Kinematik İfadeler

Şekil değiştirmiş bir küresel kabuğun herhangi bir noktasının küresel kabuğun merkezine olan uzaklığı, hangi teori kullanılırsa kullanılsın aynı olmalıdır:

$$R_{II} + \xi_{II} = R_I + \xi_I \tag{20a}$$

$$R_{II} + \xi_{II} = R_{Ia} + \xi_{Ia} \tag{20b}$$

(20a) denkleminden, (9,11,19) denklemleri yardımıyla

$$\xi^*_I = [\{1+\varepsilon\xi^*_0)^3 + \lambda^3_{II} - 1\}^{1/3} - \lambda_I]/\varepsilon \tag{21}$$

ifadesi elde edilebilir. (21) denklemi $d\xi^*_0$ ile çarpılıp –1'den +1'e kadar integre edilirse, (2) dekleminin de göz önüne alınmasıyla

$$\lambda_I = (1/2)\int_{-1}^{1}[(1+\varepsilon\xi^*_0)^3 + \lambda^3_{II} - 1]^{1/3} d\xi^*_0 \tag{22}$$

elde edilebilmektedir. Teori II'ye karşı gelen germe λ_{II} ve kalınlık parametresi ε'nun bilinmesi durumunda, Teori I'e karşı gelen germe λ_I (22) denklemi yardımıyla elde edilebilmektedir.

(5) denklemi, sonlu genleşen küresel kabuk probleminde kullanılınca

$$\lambda_{Ia} = R_{Ia}(1+\varepsilon^2/3)/[R_0(1+\varepsilon^2)] \tag{23}$$

elde edilebilmektedir. (20b) denklemi, (11,19) denklemleriyle

$$\xi^*_{Ia} = [\{(1+\varepsilon\xi^*_0)^3 + \lambda^3_{II} - 1\}^{1/3} - R_{Ia}/R_0]/\varepsilon \tag{24}$$

şekline getirilebilir. (24) denkleminde, (23) denkleminin kullanılmasıyla

$$\xi^*_{Ia} = [\{(1+\varepsilon\xi^*_0)^3 + \lambda^3_{II} - 1\}^{1/3} - \lambda_{Ia}(1+\varepsilon^2)/(1+\varepsilon^2/3)]/\varepsilon \tag{25}$$

elde edilebilir. (25) denklemi $(1+\varepsilon\xi^*_0)^2 d\xi^*_0$ ile çarpılıp –1'den +1'e kadar integre edilirse, (4) dekleminin (11) denklemleriyle birlikte göz önüne alınmasıyla

$$\lambda_{Ia} = [1/\{2(1+\varepsilon^2)\}]\int_{-1}^{1}[(1+\varepsilon\xi_0^*)^3 + \lambda_{II}^3 - 1]^{1/3}(1+\varepsilon\xi_0^*)^2 d\xi_0^* \tag{26}$$

elde edilebilmektedir. Teori II'ye karşı gelen germe λ_{II} ve kalınlık parametresi ε'nun bilinmesi durumunda, Teori Ia'ya karşı gelen germe λ_{Ia} (26) denklemi yardımıyla elde edilebilmektedir.

$(9_2, 11, 20a, 20b, 23)$ denklemleri dolayısıyla, bahsedilen teorilere karşı gelen germeler arasındaki farklar söz konusu teorilere karşı gelen yüzeylerin konumları arasındaki farklar hakkında bir ölçü olmaktadır.

4. SONLU GENLEŞEN KÜRESEL KABUK PROBLEMİNDE KESİT TESİRLERİ

Hiperelastik malzemeden yapılmış bir kabukta meridyenel normal kuvvet N_φ ve eğilme momenti M_φ,

$$N_\varphi = \partial w/\partial\bar{\lambda}_\varphi\,,\ M_\varphi = \partial w/\partial K_\varphi \tag{27}$$

bünye denklemleriyle [1,22] ifade edilebilmektedir[4]. Burada, K_φ meridyen eğriliğinin değişim ölçüsüdür ve

$$K_\varphi = \overline{k_\varphi} - \overline{\lambda_\varphi}^2 \lambda_\theta k_{\varphi 0} \tag{28}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [3]. w, S_0'ın birim alanına karşı gelen iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi yoğunluğudur. Simmonds; kabuk teorisinin içinde zaten var olan hatalar mertebesinde bir yaklaşıklıkla, bir kabuğun iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi yoğunluğunun aynı hiperelastik malzemeden yapılmış bir plağın iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi yoğunluğuna eşit olduğunu göstermiştir [23]. Dolayısıyla; bu çalışmada, neo-Hookean malzemesinden yapılmış olduğu varsayılan küresel kabuğun iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu için [3]'de türetilmiş olan neo-Hookean dairesel plağın iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu kullanılmıştır[5]:

$$\begin{aligned} w = Et\{&\overline{\lambda_\varphi}^2 + \lambda_\theta^2 + \eta^2 + A^2 - 3 + t^2[A^2(K_\varphi^2 + K_\theta^2) + B(\overline{\lambda_\varphi} K_\varphi + \lambda_\theta K_\theta) \\ &+ B^2 + 2AC]/12\} \end{aligned} \tag{29}$$

+daha yüksek mertebeden terimler.
Burada, E bir malzeme sabitidir ve

$$K_\theta = \overline{k_\theta} - \overline{\lambda_\theta}^2 \lambda_\varphi k_{\theta 0}\,,\ A = 1/(\overline{\lambda_\varphi}\,\lambda_\theta)\,,\ B = -K_\varphi/(\overline{\lambda_\varphi}^3 \lambda_\theta^2) - K_\theta/(\overline{\lambda_\varphi}^2 \lambda_\theta^3)\,,$$

---

4 Kabuk teorisinden bilinen diğer kesit tesirlerine [18] ait bünye denklemleri gerekli olmadıkları için burada verilmemiştir.

5 Neo-Hookean malzemesine ait şekil değiştirmemiş cismin birim hacmı başına üç boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu W=E (I_1 - 3) şeklinde tanımlanmaktadır [3,19] ve neo-Hookean dairesel plağın iki boyutlu şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu w, W'nin kabuk kalınlığı üzerinde integrasyonu ile elde edilebilmektedir [3].

$$C = -3B[\lambda_\theta (K_\varphi + \overline{\lambda_\varphi}^2 \lambda_\theta k_{\varphi 0}) + \overline{\lambda_\varphi}(K_\theta + \overline{\lambda_\varphi}\lambda_\theta^2 k_{\theta 0})]/[2(\overline{\lambda_\varphi}\lambda_\theta)^2]$$
$$- (K_\varphi + \overline{\lambda_\varphi}^2 \lambda_\theta k_{\varphi 0})(K_\theta + \overline{\lambda_\varphi}\ \lambda_\theta^2 k_{\theta 0})]/(\overline{\lambda_\varphi}\lambda_\theta)^4 + k_{\varphi 0}k_{\theta 0}/(\overline{\lambda_\varphi}\ \lambda_\theta) \tag{30}$$

Sonlu genleşen küresel kabuk probleminde, küresel simetriden dolayı sıfırdan farklı olan iki kesit normal kuvveti için

$$N_\varphi = N_\theta = N \ , \tag{31}$$

iki kesit eğilme momenti için

$$M_\varphi = M_\theta = M \tag{32}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada; N_θ paralel çembere etkiyen normal kuvvet, M_θ ise paralel çemberi eğmeye çalışan eğilme momentidir. İlgili kesit tesirleri,

$$N^* = N/(Et) \quad , \quad M^* = M/(Et^2) \tag{33}$$

ile boyutsuzlaştırılabilir. (28,29,30,31,32,33,9,11) denklemleri, (27) denklemlerinde kullanılınca

$$N^* = 2(\lambda - 1/\lambda^5) + \varepsilon^2(-70/\lambda^{11} + 112/\lambda^8 - 38/\lambda^5 - 8/\lambda^2 + 4\lambda)/3$$

+ daha yüksek mertebeden terimler, (34)

$$M^* = \varepsilon \ (7/\lambda^9 - 5/\lambda^6 - 1/\lambda^3 + 1)/(3\lambda)$$

+ daha yüksek mertebeden terimler elde edilebilir.

5. SAYISAL KARŞILAŞTIRMALAR

Verilen ε ve λ_{II} sayısal değerlerine karşı gelen λ_I, λ_{Ia} sayısal değerleri, (22,26) denklemlerinden bir sayısal integrasyon yöntemi olan Simpson yöntemi [24] ile elde edilmiştir. Verilen ε ve λ_{II} sayısal değerlerine karşı gelen $N^*_{II}, N^*_I, N^*_{Ia}, M^*_{II}, M^*_I$ ve M^*_{Ia} sayısal değerleri (34) denklemlerinden elde edilmiştir. Tablo 1'de bazı sonuçlar sunulmaktadır. İlgili sayısal sonuçların incelenmesi sonrasında aşağıdaki cümleler yazılabilmiştir:

(i) ε arttıkça, bahsedilen teorilere karşı gelen germeler arasındaki farklar (dolayısıyla bahsedilen teorilere karşı gelen karşılaştırma yüzeylerinin konumları arasındaki farklar) artmaktadır. Bu durum, [15]'de asimtotik analiz yardımıyla elde edilmiş olan sonuçlarla paralellik içindedir. $\varepsilon = 0$ limit durumunda, bahsedilen teorilere karşı gelen kesit etkileri biribirlerine eşit olmaktadır.

(ii) Her durumda, $\lambda_{Ia} \le \lambda_{II} \le \lambda_I$ olmaktadır. λ_{II} arttıkça, λ_{II} ile λ_I arasındaki fark (λ_{II}=1 yakın komşuluğu dışında) azalmaktadır. Bu sonuç da, belirtilen bölge dışında [15]'de elde edilen sonuçlarla uyum içindedir. λ_{II}'nin değişimi ile $\lambda_{II} - \lambda_{Ia}$ arasında bir ilişki kurulamamıştır. λ_{II}'nin 1'e eşit olması durumunda, $\lambda_{II} = \lambda_I = \lambda_{Ia} = 1$ olmaktadır ki bu durum şekil değişiminin olmadığı durumdur. Bu durumda herhangi bir kabuk noktasındaki germenin 1'e eşit olduğu ispatlanabilmektedir.

(iii) Bahsedilen teorilere karşı gelen normal kuvvetler yaklaşık olarak birbirlerine eşittirler[6].
(iv) Bahsedilen teorilere karşı gelen eğilme momentleri arasındaki farklar oldukça kalın kabuk (ε =0,1) için bile önemsenmeyecek mertebededir.

6. SONUÇLAR

Sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapan bir kabuğun şekil değişiminden önceki konumunun orta yüzeyi karşılaştırma yüzeyi olarak kabul edilmiş, şekil değişiminden sonraki konumuna ait karşılaştırma yüzeyi için Teori I ve Teori II olarak isimlendirilen iki tanım (önceki araştırmacılar tarafından) yapılmıştır. Bu çalışmada; Teori Ia olarak isimlendirilen yeni bir tanım yapılmış ve bu tanım, Teori I ve Teori II ile sonlu genleşen küresel kabuk problemi üzerinde karşılaştırılmıştır.
Yapılan çalışma sırasında ve sonrasında aşağıdaki sonuçlara varılmıştır:
(i) Kabuk kalınlığı arttıkça Teori I, Teori II ve Teori Ia'ya karşı gelen karşılaştırma yüzeylerinin konumları arasındaki farklar artmaktadır.
(ii) Genleşme arttıkça; şekil değişiminin olmadığı durumun (λ =1) yakın komşuluğu dışında Teori I ve Teori II'ye karşı gelen karşılaştırma yüzeylerinin konumları arasındaki farklar azalmaktadır. Genleşme miktarı ile Teori Ia ve diğer teorilere karşı gelen karşılaştırma yüzeylerinin konumları arasındaki farklar hakkında bir yorum yapılamamıştır.
(iii) Bahsedilen teorilere karşı gelen normal kuvvetler biribirlerine eşittirler. Bahsedilen teorilere karşı gelen eğilme momentleri arasındaki farklar önemsenmeyecek mertebededir.
(iv) Teorilerden herhangi birinin diğerlerine göre bir üstünlüğünden bahsedilememektedir. Elde edilen sonuçlar, ilgili teorilere karşı gelen karşılaştırma yüzeylerine "göredir".

TEŞEKKÜR

Bu çalışmaya verdiği destekten dolayı Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne, bu çalışmanın teorik temellerinin oluşumunda yardımlarını esirgememiş olan Sayın Hocam Prof. Dr. Vural Cinemre ve Sayın Hocam Prof. Dr. Yavuz Başar'a teşekkürlerimi sunarım.

KAYNAKLAR

[1] A. Taber, Large elastic deformation of shear deformable shells of revolution,*ASME Journal of Applied Mechanics,* 54, 578-584 (1987).

[2] R. F. Yükseler, The strain energy density of compressible, rubber-like shells of revolution, *ASME Journal of Applied Mechanics,* 63, 419-423 (Haziran 1996).

---

[6] Üç boyutlu elastisite teorisi yardımıyla, meridyen teğetine paralel normal gerilmeyi karşılaştırma yüzeyleri üzerinde tanımlanan germeler (λ_{II} , λ_{I} , λ_{Ia}) cinsinden ifade etmek mümkündür ki bu ifadenin bahsedilen teorilerden ve dolayısıyla ilgili karşılaştırma yüzeylerinden bağımsız olduğu (7,19,21,26) denklemlerinin de kullanılmasıyla ispatlanabilir. Normal gerilmenin bahsedilen teorilerden bağımsız olması, normal kuvvetin tanımı [10] gereği "normal kuvvetin bahsedilen teorilerden bağımsız olması" sonucunu getirmektedir. Şekil değiştirmiş kabuğun bir noktasının enine koordinatının bahsedilen teorilere bağlı olmasından dolayı, bir önceki cümle eğilme momenti için de geçerli olmamaktadır.

[3] R. F. Yükseler, On the definition of the deformed reference surface of rubber-like shells of revolution, *ASME Journal of Applied Mechanics,* 63, 424-428 (Haziran 1996).

[4] J. Makowski ve H. Stumpf, Finite axisymmetric deformation of shells of revolution with application to flexural buckling of circular plates, *Ingenieur-Archiv,* 59, 456-472 (1989).

[5] L. A. Taber, On approximate large strain relations for a shell of revolution, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* 20, 27-39 (1985).

[6] H. Stumpf ve J. Makowski, On large strain deformations of shells, *Acta Mechanica*, 65, 153-168 (1986).

[7] G. W. Brodland ve H. Cohen, Large-strain axisymmetric deformation of cylindrical shells, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 54, 287-291 (Haziran 1987).

[8] Y. Başar ve W. B. Kratzig, A consistent shell theory for finite deformations, *Acta Mechanica*, 76, 73-87 (1989).

[9] J. G. Simmonds, The strain-energy density of rubber-like shells of revolution undergoing torsionless, axisymmetric deformation (axishells), *ASME Journal of Applied Mechanics,* 53, 593-596 (1986).

[10] L. A. Taber, On a theory for large elastic deformation of shells of revolution including torsion and thick-shell effects, *Int. J. Solids Structures*, 24, No. 9, 973-985 (1988).

[11] L. A. Taber, Comparison of elasticity and shell theory results for large deformation of rubberlike shells, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 24, No. 3, 237-249 (1989).

[12] A. Koçak ve R. F. Yükseler, Finite axisymmetric strains and rotations of shells of revolution with application to the problem of a spherical shell under a point load, *ICCE/6 Sixth Annual International Conference on Composites Engineering, Florida,* 421-422 (1999).

[13] A. Koçak ve R. F. Yükseler, Nonlinear analysis of rubber-like shells of revolution with application to a spherical shell with ring loads, *Bridging Large Spans from Antiquity to the Present (Proceedings of the IASS-MSU International Symposium, Istanbul),* 357-364 (2000).

[14] A. Koçak ve R.F.Yükseler, Comparative analysis of a rubber-like cylinder under internal pressure, *Twelfth International Conference, Mechanics of Composite Materials, Institute of Polymer Mechanics, University of Latvia, Riga, Latvia*, s. 53, (Haziran 9-13, 2002).

[15] R.F.Yükseler, The parameters affecting the differences between the solutions corresponding to two different definitions of the reference surface of deformed rubber-like shells of revolution, (*International Journal of Non-Linear Mechanics* Dergisi'nde yayınlanmak üzere kabul edilmiştir.)

[16] A.C. Eringen, Mechanics of continua, *2nci Baskı, Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., New York,* s.89 (1980).

[17] L. A. Malvern, Introduction to the mechanics of a continuous medium, *Prentice-Hall International, Inc., Londra* (1969).

[18] K. Girkmann, Yüzeysel taşıyıcı sistemler, Çeviren: S. Tameroğlu, Cilt II, *Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul* (1965).

[19] A. E. Green ve W. Zerna, Theoretical elasticity, *2nci Baskı*, *Oxford at the Clarendon Press* (1975).

[20] S. Süray, Umumi matematik, Cilt 1 (Analiz), *4ncü Baskı, Çağlayan Kitabevi, İstanbul*, s. 465-471 (1970).

[21] M. S.Özgür, Sonlu genleşen küresel kabuk probleminde elastisite ve kabuk teorilerine karşı gelen sonuçların karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü, Yıldız Teknik Üniversitesi* (21/7/1999).

[22] E. Reissner, On finite symmetrical strain in thin shells of revolution, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Hacım: 39, s. 1137-1138 (1972).

[23] J. G. Simmonds, The strain energy density of rubber-like shells, *Int. J. Solids Structures*, Hacım: 21, No: 1, s. 67-77 (1985).

[24] W. S. Dorn ve D. D. McCracken, Numerical methods with Fortran IV case studies, *John Wiley and Sons, Inc., New York*, s. 241-255 (1972).

Tablo 1. Bazı λ_{II} ve ε değerlerine karşı gelen kesit etkileri

λ_{II}=1,5000 , ε=0,10 , λ_{I}=1,5010 , λ_{Ia}=1,4941 , N_{II}=2,7400 , N_{I}= 2,7430 , N_{Ia}= 2,7227 , M_{II}=0,0099296 , M_{I}= 0,0099517 , M_{Ia}=0,0098018
λ_{II}=1,5000 , ε=0,05 , λ_{I}=1,5003 , λ_{Ia}=1,4985 , N_{II}=2,7375 , N_{I}= 2,7382 , N_{Ia}=2,7331 , M_{II}=0,0049648 , M_{I}= 0,0049676 , M_{Ia}= 0,0049488
λ_{II}=2,0000 , ε=0,10 , λ_{I}=2,0007 , λ_{Ia}=1,9892 , N_{II}=3,9549 , N_{I}=3,9565 , N_{Ia}= 3,9312 , M_{II}=0,013509 , M_{I}= 0,013509 , M_{Ia}=0,013516
λ_{II}=2,0000 , ε=0,05 , λ_{I}=2,0002 , λ_{Ia}=1,9973 , N_{II}=3,9418 , N_{I}=3,9422 , N_{Ia}= 3,9359 , M_{II}=0,0067546 , M_{I}= 0,00 67545, M_{Ia}=0,0067556

Şekil 1. Bir kabuk elemanının şekil değişimi öncesi ve sonrasındaki geometrileri