Sigma 2003/1

DERLEME YAZISI

FUZZY GRUP VE FUZZY İDEALLER ÜZERİNE

Ayten ÖZKAN, E. Mehmet ÖZKAN, S. Ebru YENİ

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş Tarihi: 22.03.2002

ON FUZZY GROUPS AND FUZZY IDEALS

SUMMARY

In this work givens with concepts of fuzzy subset, fuzzy subgroup, a level subset of the fuzzy subset. Basic relationship between a subgroup of any group and a level subgroup is given. Also in this work, there exist definition of L-fuzzy Ideal, prime fuzzy ideal and some theorems about L-fuzzy ideals.

ÖZET

Bu çalışmada fuzzy alt küme, fuzzy alt grup, fuzzy alt kümesinin seviye alt kümesi kavramları verilmiş ve bir grubun alt grubu ile fuzzy alt grubun seviye alt grubu arasındaki bağıntılar anlatılmıştır. Ayrıca L-fuzzy ideal, asal fuzzy ideal tanımları ve L-fuzzy idealleri ile ilgili teoremlere yer verilmiştir.

1. FUZZY KÜME VE FUZZY GRUP

Tanım 1.1.

S bir küme olsun.

$$A : S \rightarrow [0,1]$$

fonksiyonuna S nin bir fuzzy alt kümesi denir. [1]

Tanım 1.2.

G bir grup olsun. G nin bir A fuzzy alt kümesi

(i) Her $x,y \in G$ için $A(xy) \geq \min\{ A(x),A(y)\}$

(ii) $A(x^{-1}) \geq A(x)$

koşullarını sağlıyorsa bu A fuzzy alt kümesine G nin bir fuzzy alt grubu denir. [1]

Tanım 1.3.

S kümesinin bir $A : S \rightarrow [0,1]$ fuzzy alt kümesi ele alınsın.
Bir $t \in [0,1]$ için

$A_t = \{ x \in S \mid A(x) \geq t \}$
kümesine A fuzzy alt kümesinin bir seviye alt kümesi denir. [1]

A, G nin bir fuzzy alt grubu ise her $x \in G$ için $A(x) \leq A(e)$ dir.

Teorem 1.1.

G bir grup ve A, G nin bir fuzzy alt grupu olsun. O zaman $t \in [0,1]$ için G nin etkisiz elemanı e ve $t \leq A(e)$ olmak üzere A_t seviye alt kümesi, G nin bir alt grubudur.

İspat

$A_t = \{x \in G \mid A(x) \geq t\}$ ve $A(e) \geq t$ olduğundan $e \in A_t$ dir. Böylece $A_t \neq \emptyset$ dır.
$x,y \in A_t$ alalım.
$A(x) \geq t$, $A(y) \geq t$ 'dir.
A bir fuzzy alt grup olduğundan $A(xy) \geq \min\{ A(x), A(y) \}$ 'dir.
Buradan $A(xy) \geq t$ olur. $xy \in A_t$ dir.
$x \in A_t$ alalım. O zaman $A(x) \geq t$ olur. A bir fuzzy alt grup olduğundan $A(x^{-1}) \geq A(x)$ dır. Buradan $A(x^{-1}) \geq t$ bulunur. Bu ise $x^{-1} \in A_t$ demektir. Sonuç olarak A_t seviye alt kümesi G nin bir alt grubudur.

Teorem 1.2.

G bir grup ve A da G nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer her $t \in [0,1]$ için $t \leq A(e)$ olmak üzere A_t , G nin bir alt grubu ise A, G nin bir fuzzy alt grubudur.

İspat

$x,y \in G$ alalım. Burada $A(x) = t_1$, $A(y) = t_2$ ve $t_1 < t_2$ olsun. O zaman $A_{t_1} \subseteq A_{t_2}$ bulunur. Yani $y \in A_{t_1}$ dir.
Hipotezden A_{t_1} , G nin bir alt gurubu olduğundan $xy \in A_{t_1}$ dir.

$$A(xy) \geq t_1 = \min\{ A(x) , A(y) \}$$
$$A(xy) \geq \min\{ A(x) , A(y) \}$$

olur.
Her $x \in G$ için $A(x^{-1}) \geq A(x)$ olduğunu gösterelim. $A(x) = t_k$ olsun. Bu da $x \in t_k$ demektir. A_{t_k} , G nin bir alt grubu olduğundan $x^{-1} \in A_{t_k}$ dir. Böylece

$$A(x^{-1}) \geq t_k$$

olur. $t_k = A(x)$ olduğundan $A(x^{-1}) \geq A(x)$ elde edilir. Dolayısıyla A, G nin fuzzy alt grubudur.

1.2. Seviye Alt Grupları

Tanım 1.4.

G bir grup ve A, G'nin bir fuzzy alt grubu olsun. $t \in [0,1]$ ve $t \leq A(e)$ olmak üzere A_t alt gruplarına A nın seviye alt grupları denir. [1]

Teorem 1.3.

G bir grup ve A, G nin bir fuzzy alt grubu olsun. $t_1 < t_2$ olmak üzere A nın iki A_{t_1} , A_{t_2} seviye alt gruplarının eşit olması için gerek ve yeter koşul $t_1 < A(x) < t_2$ olacak şekilde bir
$x \in G$ olmamasıdır.

İspat

$A_{t_1} = A_{t_2}$ olsun. $t_1 < A(x) < t_2$ olacak şekilde bir $x \in G$ elemanının olduğunu farz edelim. $t_1 < A(x) < t_2$ olduğundan $x \in A_{t_1}$,$x \notin A_{t_2}$ olur ve $A_{t_1} \neq A_{t_2}$ elde edilir. Dolayısıyla $t_1 < A(x) < t_2$ olacak şekilde $x \in G$ yoktur.
$t_1 < A(x) < t_2$ olacak şekilde G'nin bir x elemanı olmasın.
$t_1 < t_2$ olduğundan $A_{t_1} \subseteq A_{t_2}$ elde edilir. $x \in A_{t_1}$ alalım. Bu $A(x) \geq t_1$ demektir.
$t_1 < t_2$ olduğundan ve hipotezden A(x), t_1 ve t_2 arasında olamayacağından $A(x) \geq t_2$ 'dir. Bu durumda $x \in A_{t_2}$ olur. Yani $A_{t_1} \subseteq A_{t_2}$ 'dir.
Sonuçta

$$A_{t_1} = A_{t_2}$$

elde edilir.

Teorem 1.4.

Bir G grubun herhangi bir H alt grubu, G nin bir fuzzy alt grubunun bir seviye alt grubudur.

İspat

A,

$$A(x) = \begin{cases} t; x \in H \text{ ise } 0 < t < 1 \\ 0; x \notin H \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı G nin bir fuzzy alt kümesi olsun. A nın, G nin bir fuzzy alt grubu olduğunu göstereceğiz.
$x,y \in G$ alalım. $x,y \in H$ olduğunu farz edelim, o taktirde $xy \in H$ dır. Böylece

$$A(xy) = t \quad \text{ve} \quad A(x) = A(y) = t$$

olduğundan

$$A(xy) \geq \min\{ A(x), A(y) \}$$

dir.
$x \in H$ ise $A(x^{-1}) \geq A(x)$ dir.
$x \in H$ ve $y \notin H$ olduğunu farz edelim; o zaman $xy \notin H$ dır. Böylece $A(x) = t$, $A(y) = 0$, $A(xy) = 0$ dır. Buradan

$$A(xy) \geq \min\{ A(x), A(y) \}$$

olur. Eğer $x \in H$ veya $x \notin H$ ise $A(x^{-1}) \geq A(x)$ dir.
Şimdi $x,y \notin H$ olduğunu farz edelim; bu durumda $xy \in H$ veya $xy \notin H$ dır. Herbir durumda

$$A(xy) \geq \min\{ A(x), A(y) \} \quad \text{ve} \quad A(x^{-1}) \geq A(x)$$

elde edilir. Böylece tüm durumlarda A, G nin bir fuzzy alt grubudur. Bu fuzzy alt grup için
$A_t = H$ dır.

2. FUZZY İDEALLER

R, birimli değişmeli bir halka ve halka homomorfizması da birimi birime götürsün. L, en küçük elemanı 0 en büyük elemanı 1 olan bir örgü olsun. Aksi belirtilmedikçe L tam ve aşağıdaki şartı sağlayacaktır;
Her $a_i , b_j \in L$ için

$$\vee \{ a_i \mid i \in I \} \wedge \vee \{ b_j \mid j \in J \} = \vee \{ a_i \wedge b_j \mid i \in I , j \in J \}$$

dir.

Tanım 2.1.

$J : R \rightarrow L$ fonksiyonu

(i) $J(x+y) \geq J(x) \wedge J(y)$

(ii) $J(-x) = J(x)$

(iii) $J(xy) \geq J(x) \vee J(y)$

koşullarını sağlıyorsa, J ye bir L-fuzzy ideal denir. [2]

L-fuzzy ideal deyimi yerine kısaca fuzzy ideal kullanılabilir.

Teorem 2.1.

$J : R \rightarrow L$ fonksiyonunun fuzzy ideal olması için gerek ve yeter koşul her $x,y \in R$ için

$$J(x-y) \geq J(x) \wedge J(y)$$
$$J(xy) \geq J(x) \vee J(y)$$

olmasıdır.

Teorem 2.2.

$J : R \rightarrow L$ bir fuzzy ideal ise

(a) Her $x \in R$ için $J(0) \geq J(x) \geq J(1)$

(b) Her $x,y \in R$ için $J(x-y) = J(0)$ ise $J(x) = J(y)$ 'dir.

(c) Seviye kesimler $J_\alpha = \{ x \in R \mid J(x) \geq \alpha \}$, R'nin idealleridir.

İspat

(a) $x \in R$ için $J(x) = J(-x)$ olduğundan

$$J(0) = J(x-x) \geq J(x) \wedge J(-x) = J(x)$$
$$= J(x.1) \geq J(x) \vee J(1) \geq J(1)$$
$$J(0) \geq J(x) \geq J(1)$$

elde edilir.

(b) x,y $\in$ R için J(x) = J(x-y +y) $\geq$ J(x-y) $\wedge$ J(y)
= J(0) $\wedge$ J(y)
= J(y)
J(x) $\geq$ J(y) (*)

J(y-x) = J(x-y) = J(0) kullanarak, benzer şekilde J(y) $\geq$ J(x) (**) elde edilir.
(*) ve (**)dan J(y) = J(x) bulunur.

Örnek 2.1.

R tamsayılar halkası ve L = [0,1] olsun. J de, R nin çift tamsayılarının ideali olsun.

$$P(x) = \begin{cases} 2/3; x = 0 \text{ ise} \\ 1/2; x \in J - \{0\} \text{ ise} \\ 0 \quad ; \text{farklı durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı P : R $\rightarrow$ L bir fuzzy idealdir.

Yardımcı Teorem 2.1.

Eğer μ , herhangi bir R halkasının bir fuzzy ideali ve x,y $\in$ R için μ(x) < μ(y) ise o zaman
μ(x-y) = μ(x) = μ(y-x) 'dir.

R değişmeli ve birimli bir halka, R′ de birmli bir halka , f : R $\rightarrow$ R′ f(1) = 1′ olacak şekilde bir halka homomorfizması ve I = [0,1] olsun. [3]

Tanım 2.3.

Eğer J : R $\rightarrow$ I bir fuzzy ideal ise J'nin bir fuzzy koseti
(x+J)(y) = J(y-x)
şeklinde tanımlı bir x+J : R $\rightarrow$ I fonksiyondur. Bir J fuzzy idealinin tüm kosetlerinin kümesi
(x+J)+(y+J) = (x+y)+J
ve
(x+J).(y+J) = (xy)+J
şeklinde tanımlanan + ve . işlemleri altında bir halkadır. Bu halka R/J ile gösterilir.
R_J = { x $\in$R | J(x) = J(0) }
olsun. Bu, J'nin bir J(0)-seviye kesimidir ve R'nin bir idealidir. [3]

Teorem 2.3.

R/J ve R/ R_J halkaları izomorftur.

Teorem 2.4.

f : R $\rightarrow$ R′ bir epimorfizma ise kerf üzerinde sabit olan R'nin fuzzy idealleri ile R′ nün fuzzy idealleri arasında bire-bir bir eşleme vardır. Ayrıca
J : R $\rightarrow$ I ve J′ : R′ $\rightarrow$ I fuzzy idealleri ise o zaman
(i) f(R_J) = $R'_{f(J)}$

(ii) $f^{-1}(R'_{J'}) = R_{f^{-1}(J')}$

2.1. Asal Fuzzy İdealler

Tanım 2.4.

$P : R \to I$ bir fuzzy ideal olsun. Eğer her $x,y \in R$ için $P(xy) = P(0)$ olduğunda $P(x) = P(0)$ veya $P(y) = P(0)$ oluyorsa P'ye asal fuzzy ideal denir. [3]

Teorem 2.5.

Eğer $J : R \to I$ bir fuzzy ideal ise aşağıdakiler denktir:

(a) J bir asal fuzzy idealdir;

(b) R_J bir asal idealdir;

(c) R/ R_J bir tamlık bölgesidir;

(d) R/J bir tamlık bölgesidir.

İspat

Asal fuzzy ideal tanımından (a) ve (b) ifadeleri denktir. (b) ve (c) ifadelerinin denkliğini cebirden biliyoruz. (c) ve (d) ifadelerinin denkliği $R/J \cong R/ R_J$ nin bir sonucudur.

Tanım 2.5.

$J : R \to I$ bir fuzzy ideal olsun. Eğer her $x \neq 0$ elemanı için $J(x) = J(1)$ ise J ye aşikar fuzzy ideal denir. [5]

Teorem 2.6.

R'nin bir μ fuzzy idealinin ($s < t$) iki μ_s ve μ_t seviye ideallerinin eşit olması için gerek ve yeter koşul $s \leq \mu(x) < t$ olacak şekilde $x \in R$ elemanının olmamasıdır.
Buradan bir μ fuzzy idealinin seviye ideallerinin farklı olması gerekmediği çıkar.
Eğer $t_0 > t_1 > ... > t_n$ olmak üzere $Im\mu = \{t_0 ,...,t_n\}$ ise o zaman μ'nun seviye ideallerinin F_μ ailesi, $\{ \mu_{ti} \mid 1\leq i \leq n\}$ i içerir ve $\mu_{t0} \subset \mu_{t1} \subset ... \subset \mu_{tn} = R$ zinciri vardır.

Teorem 2.7.

R'nin card $Im\mu < \infty$, card $Im\theta < \infty$ olacak şekilde iki μ ve θ fuzzy ideallerinin eşit olması için gerek ve yeter koşul $Im\mu = Im\theta$ ve $F_\mu = F_\theta$ olmasıdır.

Tanım 2.6.

μ, R'nin bir fuzzy ideali olsun. Eğer her $a,b \in R$ için ya $\mu(ab) = \mu(a)$ yada $\mu(ab) = \mu(b)$ ise μ'ya fuzzy asal denir. [4]

Teorem 2.8.

Eğer A, A $\neq$ R olacak şekilde R'nin bir asal ideali ise o zaman $\alpha,\beta \in[0,1]$ ve $\alpha > \beta$ olmak üzere

$$\mu(x)=\begin{cases}\alpha; x\in A\\ \beta; x\in R/A\end{cases}$$

şeklinde tanımlı μ fuzzy ideali R'nin bir fuzzy asal idealidir.

Teorem 2.9.

R nin bir μ fuzzy idealinin fuzzy asal olması için gerek ve yeter koşul $t \in Im\mu$ olmak üzere μ_t seviye ideallerinin R nin asal idealleri olmasıdır.

Teorem 2.10.

R'nin bir μ fuzzy idealinin fuzzy ideal olması için gerek ve yeter koşul her $a,b \in R$ için $\mu(ab) = \max\{ \mu(a),\mu(b) \}$ olmasıdır. [4]
μ, R'nin bir fuzzy asal ideali ise her $x \in R$, her $n \in Z_+$ için $\mu(x^n) = \mu(x)$ 'dir.

Teorem 2.11.

Eğer $\{\mu_n \mid n \in Z_+\}$, $\mu_1 \subseteq ... \subseteq \mu_n \subseteq ...$ olacak şekilde R'nin fuzzy asal ideallerinin bir ailesi ise o zaman $\cup\, \mu_n$ ve $\cap\, \mu_n$, R'nin fuzzy asal idealleridir.

İspat

$a,b \in R$ olsun. Herhangi $i,j \in Z_+$ için $\mu_i(a)$, $\mu_j(b) \leq \mu_k(a)$, $\mu_k(b)$ olacak şekilde $k \in Z_+$ vardır ve sadece $\min\{ \mu_i(a) , \mu_j(b) \} \leq \mu_k(a-b)$ 'dır.
$\mu = \cup\, \mu_n$ olsun.

$$\begin{aligned}\min\{ \mu_i(a) , \mu_j(b) \} &= \min\{ \sup(\mu_n(a)) , \sup(\mu_j(b)) \}\\ &= \sup\{ \min(\mu_n(a) , \mu_j(b)) \}\\ &\leq \sup \mu_k(a-b) = \mu(a-b)\end{aligned}$$

Yani $\mu(a-b) \geq \min\{ \mu(a) , \mu(b) \}$ elde edilir.
Ayrıca

$$\begin{aligned}\mu(ab) = \sup \{\mu_n(ab)) &\geq \mu_i(ab)\\ &\geq \mu_i(a) , \mu_i(b) \qquad \forall i \in Z_+\end{aligned}$$

dır.
Buradan $\mu(ab) \geq (\cup\, \mu_i)(a)$, $(\cup\, \mu_i)(b)$ ve $\mu(ab) \geq \mu(a)$, $\mu(b)$ elde edilir. Böylece μ , R'nin bir fuzzy idealidir.
Şimdi μ' nün fuzzy asal olduğunu gösterelim. $\alpha = \mu(ab)$ ve $\beta = \max\{\mu(a) , \mu(b) \}$ olsun.
$\alpha \geq \beta$ olduğu açıktır. O zaman $\alpha\text{-}\varepsilon < \sup \mu_n(ab)$ 'dir. Öyle bir $j \in Z_+$ vardır ki

$$\begin{aligned}\alpha\text{-}\varepsilon < \mu_j(ab) &= \max\{ \mu_j(a) , \mu_j(b) \}\\ &\leq \max\{ \mu(a) , \mu(b) \} = \beta\end{aligned}$$

dır. Böylece $\alpha \leq \beta$ dır. Buradan $\alpha = \beta$ elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] DAS S., " Fuzzy groups and level subgroups" J.Math.Anal.Appl., 84, 264-269, 1981.

[2] KUMBHOJKAR H. V. and BAPAT M.S., " On semiprime fuzzy ideals ", Fuzzy Sets and Systems, 60, 219-223, 1993.

[3] KUMBHOJKAR H. V. and BAPAT M.S., " Not-so-fuzzy fuzzy ideals ", Fuzzy Sets and Systems, 37, 237-243, 1990.

[4] KUMAR R., " Fuzzy prime ideals: some ring theoretic analogues." , Bull.Calcuta Math. Soc. 84, 301-304, 1992.

[5] DİXİT V.N., KUMAR R., and AJMAL N., " Fuzzy ideals and fuzzy prime ideals of a ring" Fuzzy Sets and Systems, 44, 127-138, 1991.