

ARAŞTIRMA MAKALESİ

**DİKDÖRTGEN DELİK FORMUNDA DOLGU MALZEMESİ İÇEREN ŞERİT-
LEVHADA GERİLME BİRİKİMİ**

Nazmiye YAHNİOĞLU*, Alkız MERMER YÜCEL**

**Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü,
Davutpaşa Yerleşim Birimi, Topkapı-İSTANBUL*

*** Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü,
Beşiktaş-İSTANBUL*

Geliş Tarihi: 18.03.2002

STRESS CONCENTRATION AROUND A RECTANGULAR FILLER IN A STRIP-PLATE

SUMMARY

In engineering practice, rectangular holes (openings) or fillers in structural elements are often encountered. Systematic work on artificial holes under different stress boundary conditions was carried out by Savin [1]. Later works on this problem, analytical solution was developed in the view point of solution technique and different materials. However, many of them deal with stress field around a rectangular or different shape hole with rounded-off corners in a plate under different stress boundary conditions. Therefore, concentration of stresses at the corners of openings was not considered.

This paper also deals with stresses around rectangular openings and, in addition, a rectangular filler but not rounded-off corner in an isotropic strip. Considered problem is modelled in the framework of the exact equation of theory of Elasticity and solved numerically by employing Finite Element Method. The influence of the geometrical and material parameters of the opening or filler on the stress distribution is studied.

ÖZET

Mühendislik uygulamalarında, dikdörtgen delik veya dolgu malzemesi içeren yapı elemanları ile sıkça karşılaşılır. Farklı gerilme sınır koşulları altında, yapay boşluklar üzerinde sistematik olarak ilk çalışmalar Savin [1] tarafından yapılmıştır. Bu problemlerin daha sonraki çalışmalarda ele alınması, farklı malzemelerin kullanımı ve analitik çözüm yönteminin geliştirilmesi açısından olmuştur. Fakat bu çalışmaların pek çoğu farklı sınır koşulları için şerit veya levhada ele alınan dikdörtgen veya farklı geometriye sahip deliğin köşelerinin yuvarlatılmış olması kabulüne dayanmaktadır. Dolayısıyla köşe noktalarda meydana gelen gerilme birikimleri ele alınamamıştır.

Bu çalışmada, dikdörtgen delik ve dolgu malzemesi içeren, karşılıklı iki kenarından ankastre mesnetli şerit-levhanın üst yüzeyinde bulunan düzgün yayılı yük etkisinde yapısında oluşan gerilme yayılımı incelenmiştir. Ele alınan problem, Elastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde sayısal olarak Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla çözülmüştür. Delik veya dolgu malzemesinin geometrik ve malzeme parametrelerinin levhada oluşan gerilme yayılımına etkileri incelenmiştir.

1. GİRİŞ

Bütün mühendislik yapıları, yapımında modern prensiplere uygun olarak en az malzeme kullanılırken, yeterince sağlam ve güvenilir olmak zorundadır. Bu yapıların dizaynında çeşitli faktörlerin göz önüne alınması gerekir. Bunlardan biri yapı elemanlarının delik

veya boşluklar içermesi ve bu boşluklar etrafında oluşan gerilme birikimleridir. Yapı elemanlarındaki bu delik veya boşluklar yapım aşamasındaki teknolojik uyumsuzluklardan ya da malzeme tasarrufu gibi çeşitli nedenlerle yapay olarak oluşturulmuş olabilir. Yine bu yapay şekilde oluşturulan boşluklar başka bir malzeme ile doldurularak yapı elemanının mukavemetinin artırılması istenebilir. Her iki durumda da yapı elemanının içerdiği delik veya dolgu malzemesinin sınırlarında, özellikle keskin köşe olan kısımlarda, gerilme birikimleri olması kaçınılmazdır.

Bu alanda ilk ve sistematik çalışmalar Savin [1] tarafından yapılmıştır. Savin, çeşitli gerilme sınır koşulları altında, farklı geometriye sahip delik içeren sonsuz boyutlu plaklar için yerdeğiştirme ve gerilmelerin dağılımlarını, kompleks fonksiyonlar teorisi ve konform dönüşüm yardımıyla analitik olarak incelemiştir. Dikdörtgen delik için, dikdörtgen deliğin dışını birim dairenin içine dönüştüren konform dönüşüm fonksiyonu sonsuz bir seri olarak ifade edilir. Bu serinin sonlu adet terimi için gerilme fonksiyonları analitik olarak elde edilir. Konform dönüşüm serisinden sonlu adet terim alındığında, ele alınan bu parça gerçek bir dikdörtgen delik yerine, köşeleri yuvarlatılmış bir geometriye sahip delik için dönüşümü ifade etmektedir. Dikdörtgen delik formunu elde etmek ve köşe noktalarda oluşan gerilme birikimlerine ait yeterince doğru sonuç elde edebilmek, konform dönüşüm fonksiyonundan çok fazla terimi almayı gerektirir. Şimdiye kadar ancak [1] ve [2] de bu seriden az sayıda terim alınarak gerilme ve yerdeğiştirme dağılımları incelenmiştir. Bu sonuçlar köşe noktalarına yakın bölgelerde gerçek değerlerden çok uzaktır.

[3] de yukarıda verilen çözüm tekniği geliştirilmeye çalışılmış ve konform dönüşüm fonksiyonundan az sayıda terim alınarak, bir düzeltme katsayısı işlemlere dahil edilerek, [1] de verilen yöntem geliştirilmiş ve sonlu boyutlu izotrop plaklar için sonuçlar verilmiştir. Bununla beraber, yine de keskin köşelere sahip dikdörtgen delik formu ele alınamamıştır.

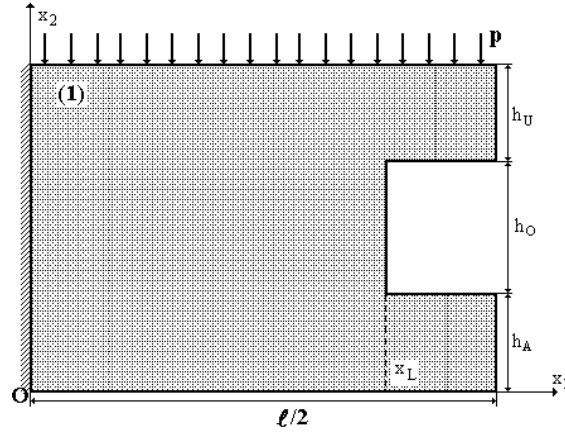
[4] de çokkatlı kompozit malzemeden hazırlanmış sonlu boyutlu anizotrop şerit-levhanın her iki kenarı rijid mesnetle tuturularak, birbirine zıt yönde yerdeğiştirme verilerek çekilmesi durumunda, yapıda oluşan gerilme yayılımına içerisindeki kare deliğin etkisi incelenmiştir. Bu incelemeler düzlem şekildeğiştirme durumunda, Elastisite Teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde, kare deliğin köşeleri keskin köşe alınarak sayısal olarak yapılmıştır.

[5] de Mura, 1982 'den sonra dolgu içeren yapı elemanlarına ait çeşitli problemlerin ele alındığı mevcut yayınların özetini ve sınıflandırmasını vermiştir.

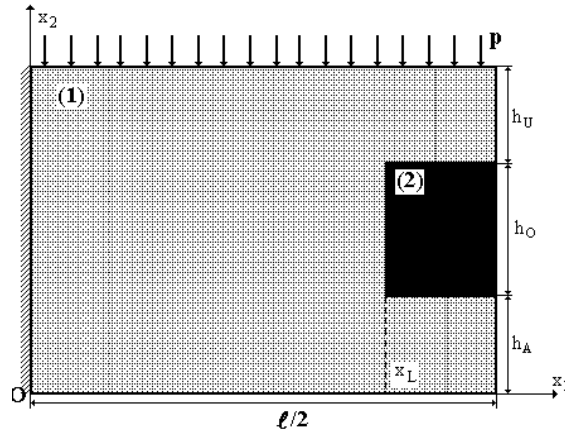
Bu çalışmada, dikdörtgen delik ve dolgu malzemesi içeren, karşılıklı iki kenarından ankastre mesnetli şerit-levhanın üst yüzeyinde bulunan düzgün yayılı yük etkisinde yapısında oluşan gerilme yayılımı incelenmiştir. Ele alınan problem, Elastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde sayısal olarak Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla çözülmüştür. Delik veya dolgu malzemesinin geometrik ve malzeme parametrelerinin şeritte oluşan gerilme yayılımına etkileri incelenmiştir.

2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU

Levhaya bağlı ve Şekil 1 de gösterilen Ox_1x_2 koordinat takımı ele alalım ve levhanın geometrik boyutlarını Şekil 1 de gösterildiği gibi kabul edelim. Belirtelim ki, $x_1 = \ell/2$ ye göre problem simetrisini göz önüne alarak Şekil 1 'de plağın $\{0 \leq x_2 \leq H; 0 \leq x_1 \leq \ell/2\}$ ($H = h_A + h_O + h_U$) bölgesini kapsayan kısmı gösterilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 1. a) Boşluk içermesi durumunda, b) Dolgu malzemesi içermesi durumunda ele alınan şerit-levhanın geometrisi.

Levhanın kapsadığı tüm bölgede ise denge denklemleri:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad ; k=1, 2 \quad (1)$$

bünye denklemleri:

$$\sigma_{11}^{(k)} = \left(\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} \right) \varepsilon_{11}^{(k)} + \lambda^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)}; \quad \sigma_{22}^{(k)} = \lambda^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)} + \left(\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} \right) \varepsilon_{22}^{(k)};$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = 2\mu^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)} \quad ; k=1, 2 \quad (2)$$

ve geometrik bağıntılar;

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i} \right), \quad k=1,2 \quad (3)$$

sağlanmaktadır. Yukarıdaki denklemlerde bilinen notasyonlar kullanılmıştır ve üst indis (1) dikdörtgen delik veya dolgu malzemesini saran malzemeye ait büyüklükleri, üst indis (2) dolgu malzemesine ait büyüklükleri göstermektedir.. (2) 'de $\lambda^{(k)}$ ve $\mu^{(k)}$ Lamé' sabitleridir.

Sınır koşullarının matematiksel ifadesi:

$$u_1^{(1)} \Big|_{x_1=0; \ell} = u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0; \ell} = 0; \quad \sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = 0; \quad \sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{x_2=H} = p\delta_{i2}; \quad i=1,2 \quad (4)$$

$$x_2 \in [0, H] \quad x_2 \in [0, H]$$

$$u_1^{(1)} \Big|_{x_1=x_L; \ell-x_L} = u_1^{(2)} \Big|_{x_1=x_L; \ell-x_L};$$

$$x_2 \in [h_A, h_A+h_B] \quad x_2 \in [h_A, h_A+h_B]$$

$$u_2^{(1)} \Big|_{x_1 \in [x_L, \ell-x_L]} = u_2^{(2)} \Big|_{x_1 \in [x_L, \ell-x_L]};$$

$$x_2 = h_A; h_A+h_B \quad x_2 = h_A; h_A+h_B$$

$$\sigma_{li}^{(1)} \Big|_{x_1=x_L; \ell-x_L} = \sigma_{li}^{(2)} \Big|_{x_1=x_L; \ell-x_L}; \quad \sigma_{2i}^{(1)} \Big|_{x_1 \in [x_L, \ell-x_L]} = \sigma_{2i}^{(2)} \Big|_{x_1 \in [x_L, \ell-x_L]} \quad (5)$$

$$x_2 \in [h_A, h_A+h_B] \quad x_2 \in [h_A, h_A+h_B] \quad x_2 = h_A; h_A+h_B \quad x_2 = h_A; h_A+h_B$$

biçiminde olur. Yukarıdaki ifadelerde bilinen notasyonlar kullanılmıştır. Ayrıca (4) de δ_{ij} Kronecker sembolüdür. Böylece ele alınan sınırdeğer probleminin matematiksel formülasyonu: Dikdörtgen delik olması durumunda (1)-(4); dikdörtgen dolgu olması durumunda (1)-(5) denklemleriyle ifade edilmektedir. (5) sınır koşullarına göre; Dolgu malzemesi ve onu saran malzemenin ortak sınırında gerilmelerin ve yerdeğiştirmelerin eşit olduğu kabul edilmektedir.

3. PROBLEMİN SONLU ELEMENLARLA MODELLENMESİ

Bu çalışma kapsamında yerdeğiştirme esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) kullanılmıştır. Çözüm bölgesinde toplam potansiyel enerjiyi ifade eden fonksiyoneli yani

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_S P_i u_i dS \quad (5)$$

ele alalım. Ω çözüm bölgesi (Şekil 1) sonlu M adet Ω_k Sonlu Elemana ayrıklaştırılır

(burada $\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k$) ve herbir Sonlu Elemanda aranan yerdeğiştirme fonksiyonu

polinom şeklinde kabul edilir. Yani,

$$\mathbf{u}^k \approx \mathbf{N}^k \mathbf{a}^k \quad (6)$$

burada \mathbf{N} ikinci dereceden standart Lagrange tipli şekil fonksiyonlarını içeren matristir [7,8]. (6) ifadesi (5) fonksiyoneline yerine yazılarak ve Ritz tekniği yardımıyla

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (7)$$

lineer cebrik denklem sistemi elde edilir. (7) 'de \mathbf{K} Stiffness (Rijitlik) matrisi, \mathbf{a} nodlarda bilinmeyen yerdeğıştirmeleri ve \mathbf{r} nodlara etki eden kuvveti gösteren vektörlerdir.

(7) denkleminin çözümlmesi sonucunda herbir nodda aranan yerdeğıştirmeler bulunur. Bu değerler yardımıyla

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a} \quad (8)$$

den gerilme değerleri elde edilir. Fakat, (8) formülü ile elde edilen gerilme fonksiyonlarının bütün bölge üzerindeki grafikleri sonlu eleman sınırlarında süreksiz olurlar. Gerçek fiziksel duruma uygun gelmeyen bu durum, sonlu eleman formülasyonundan kaynaklanmaktadır. Bu durumu ortadan kaldırmak için çeşitli sonlu elemanlar formülasyonları geliştirilmiştir. Bunlar a) Karışık Sonlu Eleman Formülasyonu (Mixed Finite Element Formulations [8]), b) İki Aşamalı Karışık Sonlu Eleman Formülasyonu ([6,8] ve diğerleri) 'dir. Bu çalışma çerçevesinde yerdeğıştirme esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanıldığı için, ikinci tip süreklileştirme işlemleri gerilmeler için kullanılmıştır. Buna göre; (8) ifadesi ile elde edilen gerilmeleri $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ile işaret edelim. Daha sonra bütün nodlarda gerilme değerlerini bilinmeyen olarak, gerilme fonksiyonu için aşağıdaki şekilde yaklaşım yapalım.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (9)$$

burada,

$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_{11}, \boldsymbol{\sigma}_{22}, \boldsymbol{\sigma}_{12})^T, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_1, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M), \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i = (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{1i}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{2i}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{12i})^T, \quad i=1,2,\dots,R \quad (10)$$

dir. (9) ifadesindeki $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}}$ şekil fonksiyonları matrisini, (10) daki $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$ vektörünün bileşenleri ise, nodlardaki gerilmeleri, M sonlu eleman adedini ve R toplam nod adedini göstermektedir. Bu çalışmada $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}}$ şekil fonksiyonları, yerdeğıştirmelerin bulunmasında kullanılan şekil fonksiyonlarının aynısı olarak alınmıştır.

$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ vektörünün bileşenleri (yani, gerilme fonksiyonlarının nodlardaki değerleri) *En Küçük Kareler Yöntemi* kullanılarak elde edilir. Bu durumda,

$$Q = \iint_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 d\Omega \quad (11)$$

fonksiyoneli ele alınır. Bu fonksiyonelin varyasyonelini sıfıra eşitleyerek, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ vektörü bileşenleri için,

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ijk}} = 0, \quad i,j=1,2; \quad k=1,2,\dots,R \quad (12)$$

denklemler sistemi elde edilir. (12) denklemlerinin çözümlmesi ile nodlardaki gerilme değerleri ve (9) yardımıyla da bütün bölgede sürekli gerilme fonksiyonları elde edilir.

4. SAYISAL SONUÇLAR

Ele alınan şerit-levhanın dikdörtgen deliği veya dolgu malzemesini saran malzeme ile dolgu malzemesinin izotrop olduğunu kabul edelim. Bu malzemelerin sırayla Lame

sabitlerini $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}$; Young Modüllerini $E^{(1)}, E^{(2)}$; Poisson oranlarını $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}$ ile gösterelim.

Çözüm bölgesi x_1 yönünde 72, x_2 yönünde 12 dikdörtgen sonlu eleman olacak şekilde ayrıklaştırılmıştır. Yapısında delik olmadığı durumda ve simetri özelliğinden yararlanarak sonlu eleman modellemesi; 432 sonlu eleman, 1825 düğüm noktası (nod) ve 3575 serbestlik derecesi (NDOF) içermektedir. Parametrelerin değerleri grafikler üzerinde verilmiş olup, üst indisler alt indis ve parantezsiz olarak kullanılmıştır.

Şekil 2'de dolgu malzemesinin veya boşluğun üç farklı kalınlığı için elastisite modülü değişimi incelenmiştir. Grafiklerden görüldüğü gibi yapı elemanının içerdiği delik yada dolgu malzemesinin sivri köşeleri olan kısımlarda gerilme birikimleri nedeniyle, gerilme değerleri hızla artmaktadır. Şekil 2.a 'da $h_B / \ell = 0,025$, Şekil 2.b 'de $h_B / \ell = 0,050$ ve Şekil 2.c 'de $h_B / \ell = 0,075$ olarak dolgu malzemesi kalınlığı alınmıştır. Grafiklerden görüldüğü üzere herbirinde E_2 / E_1 oranı arttıkça σ_{22} / p gerilmesinin değerleri artmakta ve dolgu malzemesinin kalınlığının artmasına bağlı olarak bu artışlar köşe noktaları civarında daha da büyümektedir. Ayrıca dolgu malzemesi yerine aynı ölçülerde yapı elemanının boşluk içermesi durumunda delik ucu bölgesi civarında en büyük gerilme değerleri elde edilmektedir. Dolgu malzemesinin elastisite modülü (E_2) onu saran malzemenin elastisite modülünden (E_1 'den) daha küçük alındığı durumlarda gerilme yayılımı bu malzemenin boşluk içermesi durumuna karşı gelen gerilme yayılımına yaklaşmaktadır. Aksi durumda, yani E_2 değeri E_1 değerinden büyük olduğu durumlarda gerilme yayılımı önceki durumlara göre önemli ölçüde düşmektedir.

Şekil 2 'de σ_{22} / p için elde edilen etkiler benzer şekilde Şekil 3 de σ_{11} / p gerilmesi yayılımında görülmektedir.

Şekil 4'de (Şekil 5 de) dolgu malzemesinin sabit kalınlığı ve bu dolgu malzemesinin farklı x_1 yönündeki üç uzunluğu için elastisite modül oranının değişimi incelenmiştir. Dolgu malzemesinin elastisite modülü (E_2), onu saran malzemenin elastisite modülünden (E_1 'den) küçük olduğu durumlarda aynı malzemenin aynı ölçülerde delik içermesi durumundan elde edilen gerilme yayılımına yakın değerler elde edilmektedir. σ_{22} / p (σ_{11} / p) gerilmesi yayılımında delik ucu bölgesi civarında gerilme değerleri herhangi bir delik yada dolgu malzemesi içermemesi durumundaki gerilme değerlerinden önemli ölçüde farklıdır. Bu durum dolgu malzemesinin x_1 yönündeki uzunluğu arttıkça yani sınır bölgelerine yaklaştıkça (Şekil 4.a (Şekil 5.a)), sınır koşullarının etkisiyle gerilme birikimleri daha da büyümektedir. Dolgu malzemesinin x_1 yönündeki boyutu küçüldükçe (Şekil 4.c (Şekil 5.c)) gerilme şiddetleride azalmaktadır.

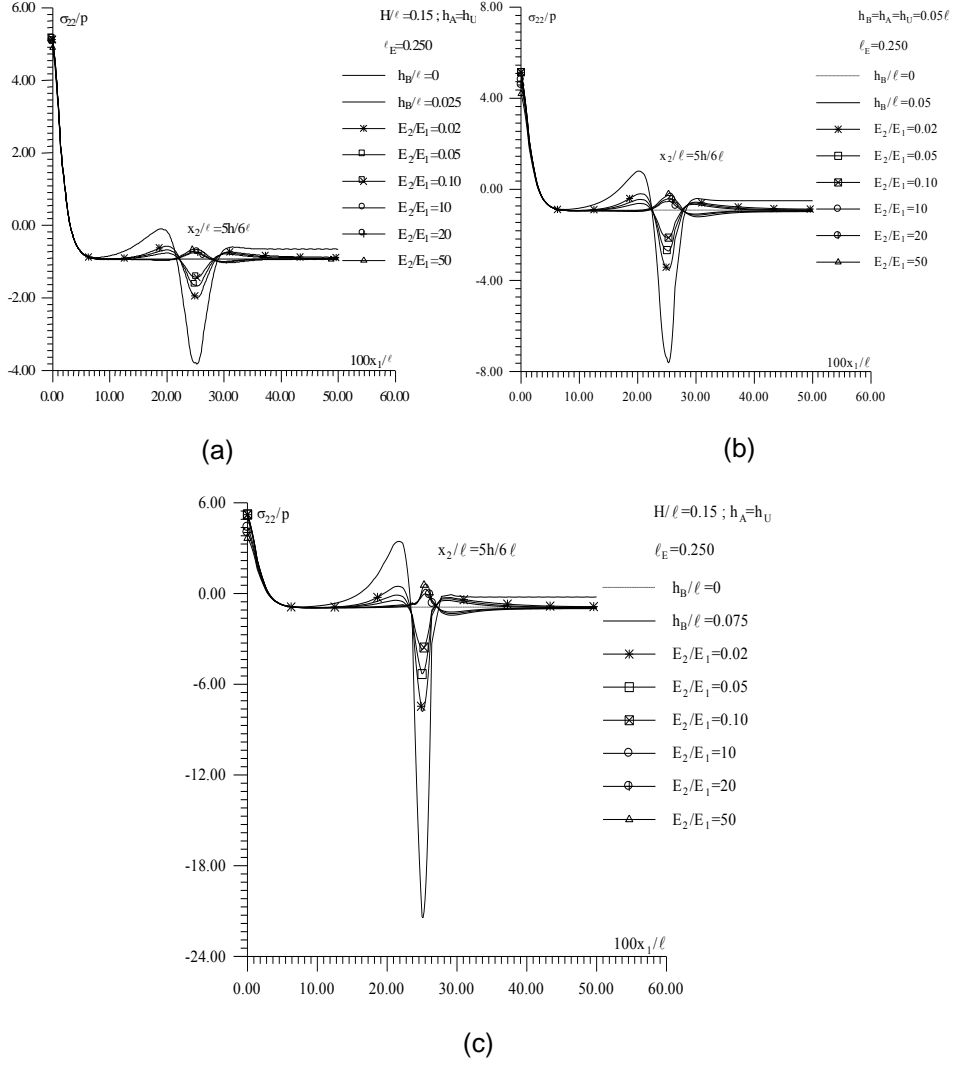
TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yapımında yardımlarını esirgemeyen Sayın *Prof. Dr. S.D. AKBAROV* hocamıza teşekkür ederiz.

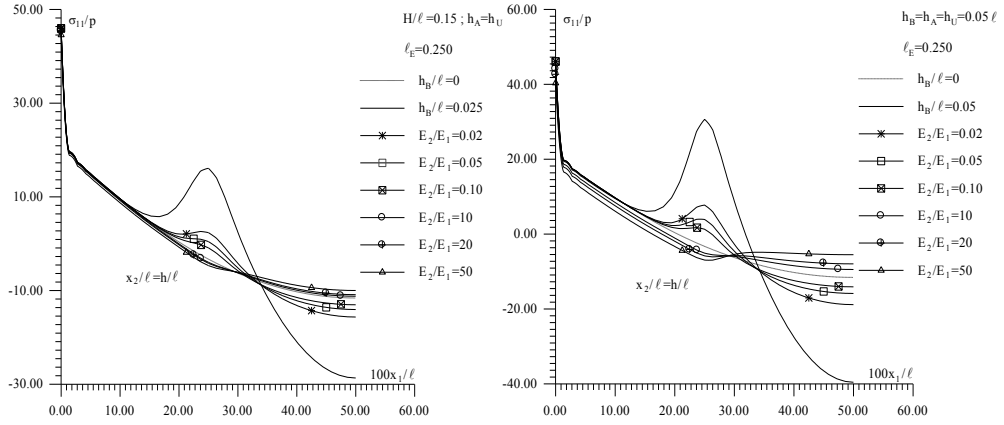
KAYNAKLAR

- [1] SAVIN G.N., "Stress Concentration Around Holes", E.Gros Translator, Pergomon, Oxford, 1961.

- [2] JONG T. De, "Stress Around Rectangular Holes in Orthotropic Plates", 15, 311-328, 1981.
- [3] LEI G.H., CHARLES W.W.Ng, RIGBY D.B., "Stress and Displacement Around an Elastic Artificial Rectangular Hole", Journal of Engineering Mechanics, 880-890, September 2001.
- [4] YAHNIOĞLU N, MERMER A., "Kare Delik İçeren Çokkatlı Kompozit Malzemeden Oluşan Şerit-Plaktaki Gerilme Dağılımı", XII. Ulusal Mekanik Konferansı, Konya, Eylül 853-859, 2001.
- [5] MURA, T., "Inclusion Problems", Appl. Mech. Rev., 41(1):15-20, 1988.
- [6] HINTON, E. and CAMPBELL, J., "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Function Using a Least Square Method", Int. J. Numerical Methods in Engineering, 8, 461-480, 1979.
- [7] AKBAROV S.D. and GUZ A.N., "Mechanics of Curved Composites", Kluwer Academic Publishers, London, 2000.
- [8] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., "The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems", Vol. 1, 4th Ed., Mc Graw-Hill Book Company, Oxford, 1989.

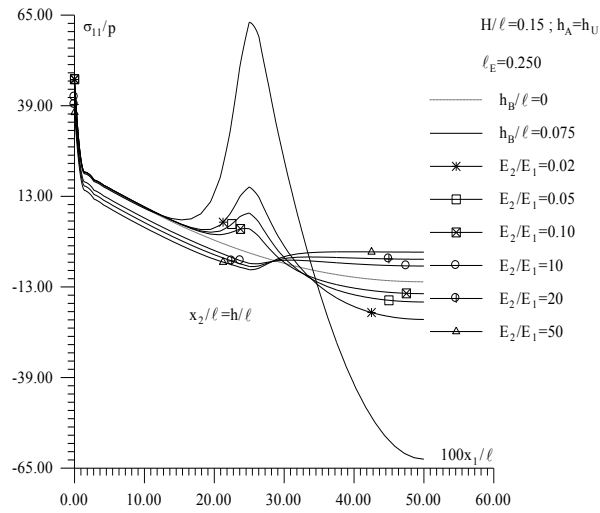


Şekil 2. σ_{22}/p gerilmesinin farklı Elastisite Modülü oranlarında a) $h_B = 0.025$ durumunda; b) $h_B = 0.05$ durumunda; c) $h_B = 0.075$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.



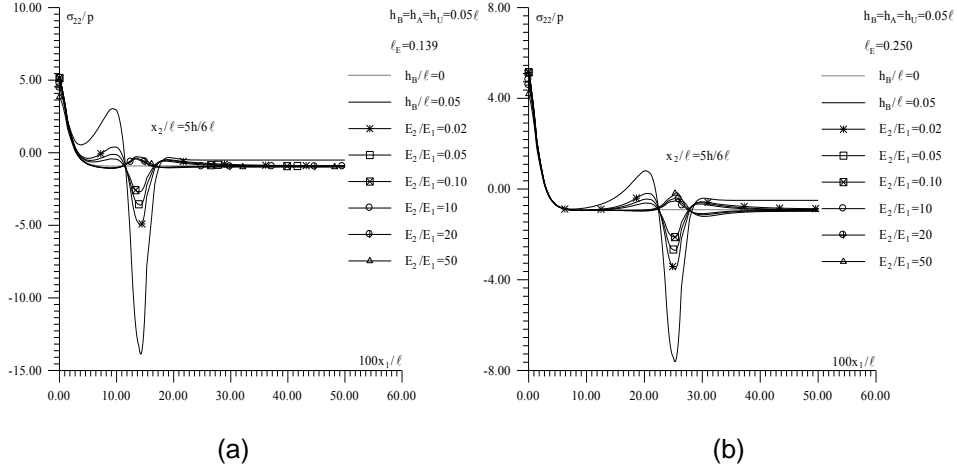
(a)

(b)



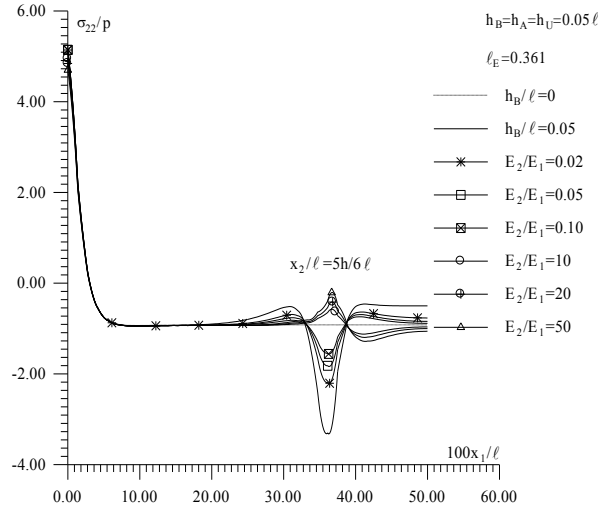
(c)

Şekil 3. σ_{11}/p gerilmesinin farklı Elastisite Modülü oranlarında a) $h_B = 0.025$ durumunda; b) $h_B = 0.05$ durumunda; c) $h_B = 0.075$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.



(a)

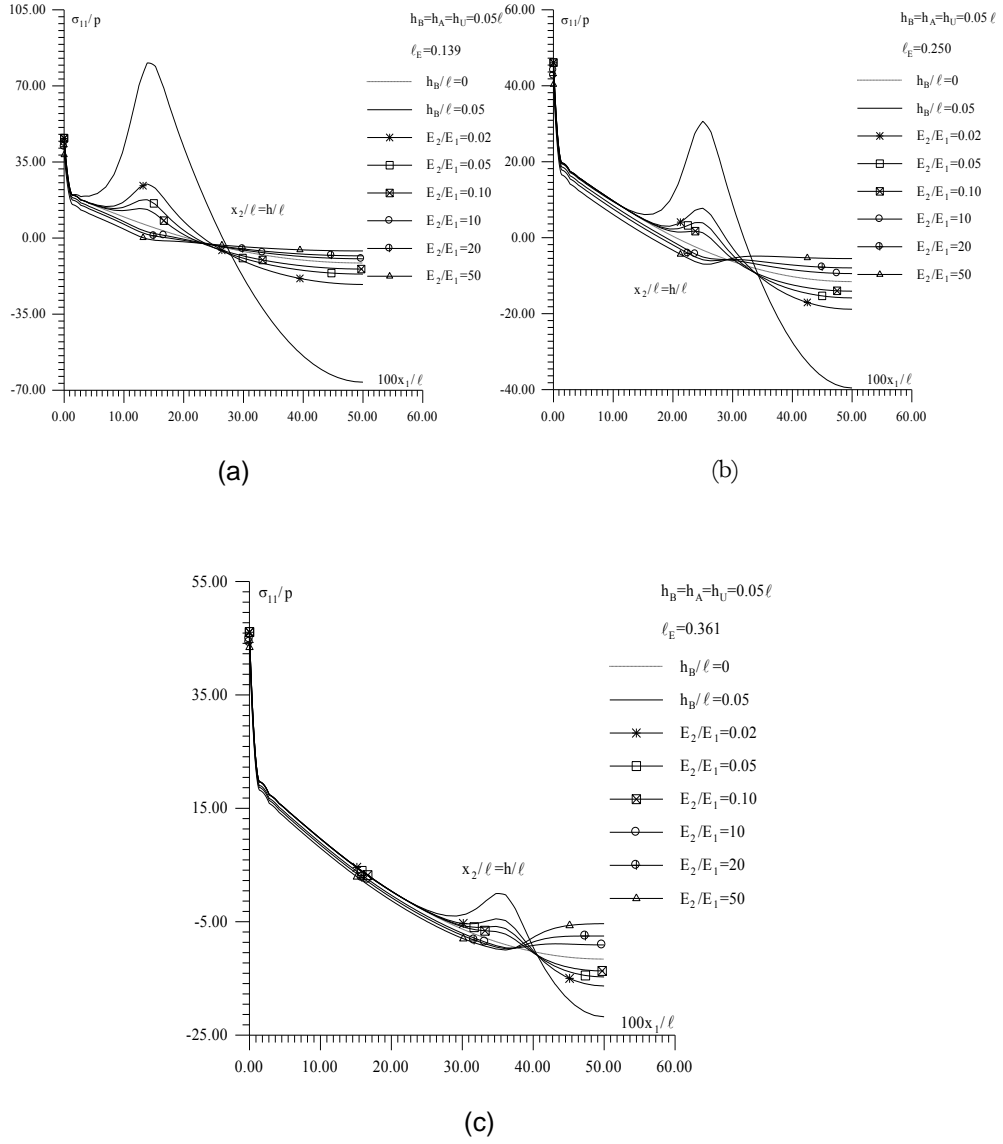
(b)



(c)

Şekil 4. σ_{22}/p gerilmesinin farklı Elastisite Modülü oranlarında a) $\ell_E = 0.139$ durumunda; b) $\ell_E = 0.250$ durumunda; c) $\ell_E = 0.361$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.

Makale Kaynağı : [Sigma](#)



Şekil 5. σ_{11}/p gerilmesinin farklı Elastisite Modülü oranlarında a) $l_E = 0.139$ durumunda; b) $l_E = 0.250$ durumunda; c) $l_E = 0.361$ durumunda x_1/l ye göre grafikleri.