ARAŞTIRMA MAKALESİ

BAZI CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE

E. Mehmet ÖZKAN, Ayten ÖZKAN

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş Tarihi: 22.03.2002

SOME ALGEBRAIC STRUCTURES

SUMMARY

In this work, some algebraic structures are mentioned. While the structures concepts and properties are given, the cases of this structures in fuzzy logic are shown.

ÖZET

Bu çalışmada, bazı cebirsel yapılardan bahsedilmiştir. Bu yapıların tanımları ve özellikleri verilirken fuzzy lojikteki durumları da kısaca gösterilmiştir.

1. GİRİŞ

Bu bölümde, cebirsel yapılarda kullanılan temel tanımlar, teoremler ve bunları netleştiren ispatlar ve örneklere yer verilerek konuya açıklık sağlanmıştır.

Latisler ve Denklik Bağıntıları

A, bir boş olmayan küme olsun A'da bir R binary (ikili) bağıntı, AxA'nın bir alt kümesidir. $(x,y) \in R$ ifadesi xRy ile gösterilir. $\forall x,y \in A$ için bağıntı aşağıda verilen yansıma ve geçişme özelliklerine sahip ise bu binary bağıntıya **yarı-sıralı** denir.

xRx (yansıma)

Eğer xRy ve yRz ise xRz'dir. (geçişme)

A da bir yarı sıralı bağıntı, $\forall x,y \in A$ için aşağıdaki anti-simetrik özelliğine sahipse bu bağıntıya A da **kısmi sıralama bağıntısı** denir.

Eğer xRy ve yRx ise x=y'dir. (antisimetrik)

A da bir yarı sıralı bağıntı, $\forall x,y \in A$ için aşağıdaki simetri özelliğini sağlıyorsa bu bağıntıya A da bir **denklik bağıntısı** denir.

Eğer xRy ise yRx'dir. (simetrik)

Denklik bağıntısı genellikle $\sim$ ile gösterilir. Simetrik olmayan yarı sıralı ise genellikle $\leq$ ile gösterilir.

$\sim$, A da bir denklik bağıntısı olsun.

$|x| = \{y \in A, y \sim x\} \quad (x \in A)$

kümesine $\sim$ denklik bağıntısının **denklik sınıfı** adı verilir. |x|'teki tüm denklik sınıflarının kümesi $A / \sim$ ile gösterilir. [5]

Teorem 1.1

$\sim$, A da bir denklik bağıntısı olsun. $\forall$ x,y $\in$A için;
a) $x\in|x|$
b) $x\sim y \Leftrightarrow |x|=|y| \Leftrightarrow x\in|y|$
c) x~y yoksa |x| ve |y| kümeleri ayrık olur.

İspat
a) Tanım gereği x~x den $x\in|x|$'dir.
b) Eğer $x\in|y|$ ise x~y'dir.
x~y olsun. Eğer $z \in |x|$ ise z~x dir. Geçişme özelliğinden dolayı z~y olur. O zaman $z \in|y|$ ve buradan da $|x| \subseteq |y|$ bulunur. Benzer şekilde $|y| \subseteq |x|$ olur. Böylece |x| = |y| bulunur. O taktirde $x \in|x| = |y|$ dir.
c) $x \sim y$ olsun. Fakat en az bir z elemanı için $z \in |x| \cap |y|$ olsun. O taktirde $z\in|x|$ ve $z\in |y|$'dir. Buradan z~x ve z~y yazılabilir. z~x yerine simetri özelliğine göre x~z yazılabilir. x~z ve z~y'den x~y olur. Bu bir çelişkidir. O taktirde $|x|\cap|y| = \phi$(ayrık) olur.

Önerme 1.1

R, boş olmayan bir A kümesinde yarı sıralı bir bağıntı olsun.
Her bir x,y $\in$A için

$$xEy \Leftrightarrow xRy \text{ ve } yRx$$

yazılabilir. E binary bağıntısı A'da bir denklik bağıntısıdır. Bundan başka her bir $x,y\in A$ için;

$$xSy \Leftrightarrow xRy$$

olsun. S binary bağıntısı A / E de bir sıralı bağıntıdır.

Bir kısmi sıralı küme (partially ordered set) veya **poset,** sıralama bağıntısı $\leq$ ile tanımlanmış bir A kümesidir. Tabi ki bir A kümesinde farklı sıralama bağıntıları tanımlanabilir. Eğer bir poset A, her bir x,y $\in$A için ya $x\leq y$ ya da $y\leq x$ ise, A lineerdir ve **zincir** (chain) olarak adlandırılır. [5]
$a\leq b$ ve $a\neq b$ olacak şekilde bir $b\in A$ yoksa poset A'nın bir a elemanına **maximal** denir. $b\leq a$ ve $b\neq a$ olacak şekilde bir b $\in$A yoksa poset A'nın bir a elemanına **minimal** denir. Bir poset, maximal ve minimal elemanları içerebilir. [5]
$\forall x\in X$ için $x \leq a$ olacak şekilde bir a $\in$A elemanına poset A'nın bir X alt kümesinin **üst sınırı** (upper bound) denir. Eğer $b\in A$, X'in bir üst sınırı ise $a\leq b$ olacak şekilde bir üst sınır a'ya **en küçük üst sınır** (least upper bound) denir. $X\subseteq A$'nın bir en küçük üst sınırı $\vee(x|x\in X)$ ile gösterilir. Özellikle $\vee$ {x,y} için $x\vee y$ 'dir. Benzer şekilde $X\subseteq A$'nın bir alt sınırı, $\forall x\in X$ için $a \leq x$ olacak şekilde bir a $\in$A nın varolmasıdır. Eğer her b alt sınırı için $b\leq a$ varsa alt sınır a'ya **en büyük alt sınır** (greatest lower bound) denir $X\subseteq A$'nın en büyük alt sınırı $\wedge$ $\{x|x\in X\}$ ile gösterilir. Özellikle $\wedge$ {x,y} için $x\wedge y$ dir. [5]

Zorn Lemması

Bir kısmi sıralı küme olan A'nın elemanlarının her zinciri A'da bir üst sınıra sahiptir, o taktirde A bir maximal elemana sahiptir. $\forall a\in A$ için $a\leq b$ olacak şekilde bir b maximal elemanı vardır.
Eğer $\forall x\in A$ için $a\leq x$ olacak şekilde poset A bir a elemanına sahipse a, en küçük eleman veya A'nın sıfırı olarak adlandırılır ve **0** ile gösterilir. $\forall x\in A$ için $x\leq b$ olacak şekilde bir b elemanına sahipse b ye en büyük eleman veya A'nın birimi denir ve **1** ile gösterilir.

Açıkça bir poset A en fazla bir en küçük elemana ve en fazla bir en büyük elemana sahiptir. [5]

Tanım 1.1

Herhangi $x,y \in L$ için $x \wedge y$ ve $x \vee y$ L'de mevcut olacak şekilde bir poset L'ye **latis** denir. $x \wedge y$, x ve y'nin ortak alanı, kesişimi, $x \vee y$, x ve y'nin bir birleşimi olarak adlandırılır.
Eğer sayılabilir herhangi $X \subseteq L$ alt kümesi için $\vee \{x|x \in X\}$ ve $\wedge\{x|x \in X\}$, L de varsa L latisine **tam latis** denir. [5]

Teorem 1.2

$\forall x,y \in A$ için $x \wedge y = x$, $x \vee y = y \Leftrightarrow x \leq y$ ifadesi bir zincir A da tanımlansın. O taktirde latis bulunur.

İspat

A bir zincir olduğundan her bir $x,y \in A$ için ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ vardır. Böylece $x \wedge y$ ve $x \vee y$ daima tanımlıdır.
$x \leq y$ olsun. O taktirde $x \wedge y \leq x,y$ dir. Eğer bazı $z \in A$ için $z \leq x,y$ ise $z \leq x \wedge y$ dir. Böylece $x \wedge y$=En büyük altsınır$\{x,y\}$ dir. $x \vee y \geq x,y$ vardır. Eğer bazı $z \in A$ için $z \geq x,y$ ise $x \vee y \geq z$ dir. Böylece $x \vee y$= En küçük üst sınır $\{x,y\}$ dir.
$y \leq x$ durumu, simetriktir. Böylece A bir latistir.

Teorem 1.3

A bir poset olsun A'da aşağıdaki denklemler vardır:

$x \wedge x = x,\ x \vee x = x$ (1.1)

$x \wedge y = y \wedge x,\ x \vee y = y \vee x$ (1.2)

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (1.3)

$x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (1.4)

$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$ (1.5)

Önerme 1.2

Herhangi bir $x,y,z \in L$ için eğer $y \leq z$ iken

$x \wedge y \leq x \wedge z$, $x \vee y \leq x \vee z$

ise bir L latisinde kesişim ($\wedge$) ve birleşim ($\vee$) operatörleri **izoton** (isotone) dur.

İspat

$x \wedge y$	$= (x \wedge x) \wedge y$	(1.1)'den
	$= (x \wedge x) \wedge (y \wedge z)$	($y \leq z$'den)
	$= (x \wedge y) \wedge (x \wedge z)$	(1.2)'den
	$x \wedge y \leq x \wedge z$	(1.5)'ten

$x \vee z$	$= (x \vee x) \vee z$	(1.1)'den
	$= (x \vee x) \vee (z \vee y)$	($y \leq z$'den)
	$= (x \vee z) \vee (x \vee y)$	(1.2)'den
	$x \vee z \geq x \vee y$	(1.5)'ten

$\leq, \wedge, \vee$ latis operatörleri olmak üzere bir L latisi bazen $<L, \leq, \wedge, \vee>$ ile gösterilir.

Önerme 1.3

Bir L latisinde herhangi $x,y,z \in L$ için

$x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y) \vee (x\wedge z) \Leftrightarrow x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ dir.

İspat

$x,y,z\in L$ için

$$\begin{aligned} x\wedge(y\vee z) &= x\wedge(z\vee y) \\ &= [x\wedge(z\vee x)]\wedge(z\vee y) \\ &= x \wedge [(z\vee x)\wedge(z\vee y)] \\ &= x\wedge[z\vee(x\wedge y)] \\ &= [x\vee(x\wedge y)]\wedge[z\vee(x\wedge y)] \\ &= [(x\wedge y)\vee x]\wedge[(x\wedge y)\vee z] \\ &= (x\wedge y)\vee(x\wedge z) \end{aligned}$$

$x,y,z \in L$ için

$$\begin{aligned} x\vee(y\wedge z) &= x\vee(z\wedge y) \\ &= [x\vee(z\wedge x)]\vee(z\wedge y) \\ &= x\vee[(z\wedge x)\vee(z\wedge y)] \\ &= x\vee[z\wedge(x\vee y)] \\ &= [x\wedge(x\vee y)]\vee[z\wedge(x\vee y)] \\ &= [(x\vee y)\wedge x]\vee[(x\vee y)\wedge z] \\ &= (x\vee y)\wedge(x\vee z) \end{aligned}$$

Tanım 1.2

Bir $<L, \leq, \vee, \wedge>$ latisinde yukarıdaki eşitlikler varsa dağılımlı latis olarak adlandırılır.[5]

Tanım 1.3

Bir $<L, \leq, \wedge, \vee>$ dağılımlı latisinde $\forall y\in L$ için $(x\wedge x^*)\vee y = y$ ve $(x\vee x^*)\wedge y = y$ olacak şekilde $\forall x\in L$ elemanı ile birleşen bir $x^* \in L$ varsa bu latise bir **Boole Cebiri** denir. x^* elemanına x'in latis-tümleyeni denir. Bir Boole Cebiri $<L, \leq, \wedge, \vee, {}^*>$ ile gösterilir.[5]

Örnek:

$\{0,1\}$ kümesinde $0^*=1$ ve $1^*=0$ dır. O taktirde $<\{0,1\}, \leq, \min, \max, {}^*>$ sistemi bir Boole Cebiri'dir.
Bir boş olmayan A kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi P(A) olsun. Herhangi bir $X\in P(A)$ alt kümesi için $X^*=A \setminus X$ 'dir. O taktirde diğer bir Boole Cebiri $< P(A), \subseteq, \cap, \cup, {}^* >$ elde edilir.

Önerme 1.4

Herhangi bir tümleyen zincir L, sonsuz dağılımlı olsun. Herhangi $x\in L$ ve herhangi $\{y_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq L$ alt kümesi için

$$x\wedge \bigvee_{i\in\Gamma} y_i = \bigvee_{i\in\Gamma} (x\wedge y_i) \qquad (1.6)$$

$$x \vee \bigwedge_{i\in\Gamma} y_i = \bigwedge_{i\in\Gamma} (x \vee y_i) \qquad (1.7)$$

dir.

Burada Γ, bir index kümedir.

İspat

(1.6) nın ispatı iki duruma sahiptir.

i) Her bir $i\in\Gamma$ için $x\wedge y_i = y_i$ olsun. O taktirde her bir $i\in\Gamma$ için $y_i \leq x$'dir.

$$\bigvee_{i\in\Gamma} (x\wedge y_i) = \bigvee_{i\in\Gamma} y_i \leq x$$

yazılır.

$$x\wedge \bigvee_{i\in\Gamma} y_i = \bigvee_{i\in\Gamma} y_i = \bigvee_{i\in\Gamma} (x\wedge y_i)$$

olur.

ii) Bazı $j\in\Gamma$ için $x\wedge y_j = x$ olsun. O taktirde $x \leq y_j \leq \bigvee_{i\in\Gamma} y_i$

$$x \wedge \bigvee_{i\in\Gamma} y_i = x = x \wedge y_j \leq \bigvee_{i\in\Gamma} (x\wedge y_i) \qquad (*)$$

Diğer yandan her bir $i\in\Gamma$ için $x\wedge y_i \leq x \wedge \bigvee_{i\in\Gamma} y_i$ vardır.

Böylece $\bigvee_{i\in\Gamma} (x\wedge y_i) \leq x \wedge \bigvee_{i\in\Gamma} y_i$ dir. (**)

(*) ve (**)'dan $x \wedge \bigvee_{i\in\Gamma} y_i = \bigvee_{i\in\Gamma} (x\wedge y_i)$ olur.

1.3. Latis Filtreleri:

Bir L latisinin boş olmayan bir alt kümesi F olsun. $\forall a,b\in L$ için

$a \wedge b\in F \Leftrightarrow a,b\in F$

koşulu gerçekleşiyorsa F kümesine L'nin bir **latis filtresi** veya **filtre** denir. [5]

Teorem 1.4

F boş kümeden farklı ve $F\subseteq L$ olsun.

F bir filtre $\Leftrightarrow$

eğer $a,b\in F$ ise $a\wedge b\in F$ dir. (1.8)

eğer $a\in F$ ve $a\leq b$ ise $b\in F$ dir. (1.9)

(1.9). koşulu

eğer $a\in F$ ve $b\in L$ ise $a\vee b\in F$ dir (1.10)

şeklinde düzeltilebilir.

İspat

Filtre tanımından (1.8).koşulunun gerçekleştiği açıktır.

$a\in F$ ve $a\leq b$ olsun. O zaman $a=a\wedge b\in F$ dir. Filtre tanımında $b\in F$ dir. Böylece (1.9) koşulu vardır.

Diğer taraftan (1.8) ve (1.9) koşulu kabul edilsin, $a \wedge b \in F$ olsun. $a \wedge b = a,b$ den $a,b \in F$ olur. Böylece filtre tanımı gerçekleşir.
(1.9) koşulundan $a \in F$, $b \in L$ ise $a \leq a \vee b$ dir. Böylece $a \vee b \in F$ dir. Aynı şekilde (1.10) koşulu kabul edildiğinde $a \in F$, $a \leq b$ ise $a \vee b = b \in F$'dir.

1.4. Artık Latisler (Residuated Lattices)

Bir boş olmayan A kümesi üzerinde h, bir binary operatör olsun. Herhangi $a,b,c \in A$ için $a \leq b$ olacak şekilde $h(a,c) \leq h(b,c)$ koşulunu sağlayan h operatörüne **birinci değişkende izoton** denir.
$a \leq b$ olacak şekilde $h(b,c) \leq h(a,c)$ koşulunu sağlayan h operatörüne **birinci değişkende antiton** denir. İkinci değişkende izoton ve ikinci değişkende antiton kavramları benzer şekilde tanımlanır. Birinci değişkende izoton ve ikinci değişkende izoton olan h, kısaca izoton olarak adlandırılır. [5]

Tanım 1.4

$<L, \leq, \wedge, \vee>$, μ, f ve g binary operatörlerine sahip bir latis olsun.

μ; bileşimli ve izoton (1.11)

$\mu(x,y) \leq z \Leftrightarrow x \leq f(y,z)$

$\mu(x,y) \leq z \Leftrightarrow y \leq g(x,z)$ (1.12)

olsun. O taktirde $<L, \leq, \wedge, \vee, \mu, f, g>$'ye bir **genelleştirilmiş artık latis** denir. Burada $\mu(x,y)$ yerine x.y yazılır.

Herhangi $x,y,z \in L$ için eğer $x \leq y$ ise;

$f(y,z) \leq f(x,z)$ ve $g(y,z) \leq g(x,z)$ (1.13)

$f(z,x) \leq f(z,y)$ ve $g(z,x) \leq g(z,y)$ (1.14)

dir.

Bu durumda f(x,y) veya g(x,y) yerine $x \rightarrow y$ ve x.y yerine $x \Theta y$ yazıldığında $<\Theta, \rightarrow>$ eşliği **adjoint eşlik** , Θ **çarpma** veya **çarpım** ve $\rightarrow$**, artan** olarak adlandırılır. [4,5]

$x \Theta y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \rightarrow z$ olur. (1.15)

(1.15) koşulu **Galois Eşleşmesi** olarak adlandırılır.

Bu koşul

$x \leq y \rightarrow (x \Theta y)$

$(x \rightarrow y) \Theta x \leq y$

ile de tanımlanabilir. [5]

Önerme 1.5

$<\Theta, \rightarrow>$ bir adjoint eşlik olsun.

O taktirde

$$x \Theta \bigvee_{i \in \Gamma} y_i = \bigvee_{i \in \Gamma} (x \Theta y_i) \qquad (1.16)$$

L de bu birleşimler vardır.

İspat

$x \in L$ $\{y_i\}_{i\in\Gamma} \leq L$ olsun. (1.16) denkleminin her iki tarafı da L'de mevcut olsun. Θ, izoton olduğundan her bir $i \in \Gamma$ için

$$x\Theta y_i \leq x \Theta \bigvee_{i\in\Gamma} y_i$$

olur. Bundan dolayı

$$\bigvee_{i\in\Gamma} (x\Theta y_i) \leq x \Theta \bigvee_{i\in\Gamma} y_i \qquad (*)$$

dir.

Aksine her bir $i \in \Gamma$ için $x\Theta y_i \leq \bigvee_{i\in\Gamma} (x\Theta y_i)$ iken (1.15) ile her bir $i \in \Gamma$ için

$$y_i \leq x \to \bigvee_{i\in\Gamma} (x\Theta y_i)$$

bulunur. Böylece $\bigvee_{i\in\Gamma} y_i \leq x \to \bigvee_{i\in\Gamma} (x\Theta y_i)$ dir. Tekrar (1.15) ile

$$x\Theta \bigvee_{i\in\Gamma} y_i \leq \bigvee_{i\in\Gamma} (x\Theta y_i) \qquad (**)$$

olur. (*). ve (**). eşitlikten $\bigvee_{i\in\Gamma} (x\Theta y_i) = x\Theta \bigvee_{i\in\Gamma} y_i$'dir.

Önerme 1.6

L bir genelleştirilmiş artık latis olsun. Çarpma değişmeli kabul edilsin. O taktirde herhangi $x,y \in L$ için

$$x \to y = \vee \{z \mid z \Theta x \leq y\} \qquad (1.17)$$

dir.

İspat

$z \Theta x \leq y$ olacak şekilde herhangi bir $z \in L$, $z \leq x \to y$ koşulunu sağlar.
Diğer yandan $(x \to y) \Theta x \leq y$ dir. Bundan dolayı;

$$(x \to y) \in \{z \mid z \Theta x \leq y\}$$

dir.

Tanım 1.7

0,**1** elemanlarını içeren Θ çarpımlı L genelleştirilmiş artık latisi, herhangi $x \in L$ için $x \Theta \mathbf{1} = x$ koşulunu sağlıyorsa L ye artık latis adı verilir.

L artık latisi $< L, \leq, \wedge, \vee, \Theta, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1} >$ ile gösterilir. [5]

2. CEBİRSEL YAPILAR

2.1. GİRİŞ[2]

Cebirsel yapıların fuzzy lojikteki genel durumunu görmek için literatürdeki bazı önemli tanımları ve özellikleri gözönüne alalım.

Aşağıdaki denklemler L artık latislerinde geçerlidir.

$a \to 1=1 \quad a \to a=1$ (2.1)

$0 \to a=1 \quad 1 \to a=a$ (2.2)

$a \to b=1 \Leftrightarrow a \le b$ (2.3)

$(a \to b)\ \Theta\ (b \to c) \le a \to c$ (2.4)

$(\bigvee_i a_i) \to b = \bigwedge_i (a_i \to b)$ (2.5)

$a \to (\bigwedge_i b_i) = \bigwedge_i (a \to b_i)$ (2.6)

$b \le a \to a \Theta b$ (2.7)

$(a \to b)\ \Theta\ a \le b$ (2.8)

$(a \Theta b) \to c = b \to (a \to c)$ (2.9)

$\bigvee_i (a_i \to b) \le (\bigwedge_i a_i) \to b$ (2.10)

$\bigvee_i (a \to b_i) \le a \to (\bigvee_i b_i)$ (2.11)

Burada $a,b,c,a_i, b_i \in L$ dir. **1**, L'nin, maximal elemanı **0**, L'nin minimal elemanıdır.

{0,1} doğruluk değer kümesi olacak şekilde, $< \{0,1\}, \le, \wedge, \vee, \Theta, \to >$ artık latis olduğundan ilerlemek için en kolay yol tabi ki klasik mantıkdan başlamak olacaktır. Bu küme ile latisi oluşturan işlemler düzenlenirse;

$a \wedge b = a \Theta b = \min\{a,b\}$ (2.12a)

$a \vee b = \max\{a,b\}$ (2.12b)

$\neg a = 1-a$ (2.12c)

$a \to b = \neg a \vee b$ (2.12d)

işlemleri vardır.

$$a \to b = \begin{cases} 1 & a \le b \text{ ise} \\ b & \text{diğer hallerde (aksi halde)} \end{cases} \quad (2.13)$$

bulunur.

(2.12)koşulunda {0,1} kümesi için [0,1] kapalı aralığı alınırsa ümit verici hız kazanılır. Maalesef bu ele alış tarzı (2.13). koşuldan ve özdeş kuraldan dolayı hoşa gitmeyen sonuçlar doğurmaktadır. Diğer durumlarda $a \to a=1$ özelliği geçerlidir.

2.2. De Morgan Cebirleri

Bir $A = < A, \wedge, \vee, \neg >$ De Morgan cebiri, $\neg$ bir binary (birli) işlemi ile De Morgan kuralı geçerli olacak şekilde $<A, \wedge, \vee>$ dağılımlı latisine sahip ise aynı zamanda **soft cebir** adını alır. Soft cebir üzerine kurulu fuzzy lojik sistemler özellikle Di Nola ve Ventre, Preparata ve Yeh ve diğerleri tarafından çalışılmıştır. [2]

Soft cebirlerinin bir örneği [0,1] birim aralığıdır. Burada $\wedge, \vee, \neg$ işlemleri klasik olarak tanımlıdır.

De Morgan cebirlerinde koşullu önerme için yorum yoktur ve bundan dolayı ek çift meydana gelmez. $\to$, (2.12a) özelliği ile tanımlanmıştır. [2]

2.3. Pseudo Boole Cebirleri

Bir Pseudo-Boole cebri $\wedge$ ve $\vee$, latis kesişimi ve birleşimi olmak üzere $<A, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg>$ yapısında bir cebirdir. Sırasıyla $\neg a = a \rightarrow 0$ ve $a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \rightarrow c$ dir. Teorem gereği herhangi pseudo-Boole cebri $<A \leq, \wedge, \vee, \wedge \rightarrow>$ artık latisdir. Burada $\leq$, latis sıralıdır. $\leq$ 'in tam sıralı olduğu durumda (2.13) koşulu ve ∩ , U operatörleri klasik olarak elde edilir.[2]

2.4. MV-Cebirleri

Bir MV-cebiri, $<A, \oplus, 0>$ da herhangi $x,y \in A$ için

$$x \oplus 1 = 1,\ x^{**} = x$$
$$0^* = 1,\quad x \Theta y = (x^* \oplus y^*)^*$$
$$(x^* \oplus y)^* \oplus y = (y^* \oplus x)^* \oplus x$$

olacak şekilde $A = <A, \oplus, \Theta, {}^*\ 0,1>$ yapısında bir cebirdir.
Herhangi $x,y \in A$ için

$$x \wedge y = (x \oplus y^*) \Theta y$$

ve

$$x \vee y = (x \Theta y^*) \oplus y$$

tanımlandığında $<A, \leq, \wedge, \vee>$ nın, $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ kısmi sıralaması altında dağılımlı latis olduğu görülür. Herhangi bir A MV-cebirinde $x \leq y \Leftrightarrow x^* \oplus y = 1$ koşulları verilmiştir.[2,3,4]

Önerme 2.1

$a,b \in A$ için $a \rightarrow b = a^* \oplus b$ şeklinde tanımlanırsa $<A, \leq, \wedge, \vee, \Theta, \rightarrow>$ şeklinde bir artık latis elde edilir.[1]

İspat

Θ işlemi izoton, bileşimli ve değişmeli olduğundan ispat edilen şey sadece Galois eşlemesidir.
Gerçekten

$$\begin{aligned} a \Theta b \leq c &\Leftrightarrow (a \Theta b)^* \oplus c = 1 \\ &\Leftrightarrow a^* \oplus (b^* \oplus c) = 1 \\ &\Leftrightarrow a \leq b^* \oplus c \end{aligned}$$

2.5. Wajsberg Cebirleri

Burada Galois eşleşmesinden hareket edilerek aşağıdaki denklemleri sağlayan $A = <A, \rightarrow, \neg, 1>$ şeklindeki yapıya Wajsberg cebri adı verilmiştir [1].

$$1 \rightarrow x = x$$
$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$$
$$(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$$
$$(\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$$

2.6. Lukasiewicz Cebirleri

$a \oplus b = 0 \vee (a+b-1)$ ve $a \rightarrow b = 1 \wedge (1-a+b)$ olacak şekilde [0,1] birim aralığında $\wedge$ (min), $\vee$ (max), $\oplus$ ve $\rightarrow$ işlemini tanımlandığında artık latis'in Lukasiewicz tipi elde edilir..
$L = \{0=a_o < \ldots . < a_m = 1\}$ sonlu zincirinde $0 \le k$, $p \le m$ için $a_k \oplus a_p = a_{max}\{o, k+p-m\}$ ve $a_k \rightarrow a_p = a_{min}\{m, m-k+p\}$ şeklinde ele alınırsa $<L, \le, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow>$ artık latisi bulunur.
Burada L, ya birim aralık yada sonlu zincirdir. $\oplus$ işlemi tüm bu çalışmalarda $\wedge$ nin bir yorumudur. Koşullu önermenin yorumu $\rightarrow$ işlemidir.[2]

KAYNAKLAR

[1] Di NOLA A., TURUNEN E. and GERLA G.," Survey of Theory and Applications of Lukasiewicz-Pavelka Fuzzy Logic", Lectures on Soft Computing and Fuzzy Logic. Advances in Soft Computing. Physica-Verlag, Heidelberg, 313-337, 2001

[2] TURUNEN E, "Algebraic structures in Fuzzy Logic", Fuzzy Sets and Systems, 51,181-188, 1992

[3] SESSA S.and TURUNEN E.,"Local BL-algebras", Multi. Val. Logic, Vol 6, pp.229-249, 2001

[4] TURUNEN E. ,"Rules of Inference in Fuzzy Sentential Logic", Fuzzy Set and Systems 85, 63-72, 1997

[5] TURUNEN E.,"Mathematics behind Fuzzy Logic. Advances in Soft Computing", Physica-Verlag, Heidelberg, 1999. 1-11