

ARAŞTIRMA MAKALESİ

AYNI AÇISAL HIZDA EKSANTRİK DÖNEN DİSKLER ARASINDAKİ VİSKOZ AKIŞKANIN HAREKETİNDE DURMA NOKTALARININ GEOMETRİK YERİ

H. Volkan ERSOY

İ.T.Ü. Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Gümüşsuyu-İSTANBUL

Geliş Tarihi: 08.01.2001

LOCUS OF STAGNATION POINTS IN THE FLOW OF A VISCOUS FLUID BETWEEN DISKS ROTATING AT THE SAME ANGULAR VELOCITY ABOUT NON-COINCIDENT AXES

SUMMARY

In this study, the locus of stagnation points in the flow of an incompressible viscous fluid between disks rotating with the same angular velocity about two parallel and different axes is examined according to the Reynolds number R , the eccentricity parameter δ , the parameters γ_1 and γ_2 , which represent the two-parameters family of solutions.

ÖZET

Bu çalışmada, aynı açısız hızla çakışmayan eksenler etrafında dönen diskler arasındaki sıkıştırılmayan viskoz bir akışkanın hareketinde durma noktalarının geometrik yeri, R Reynolds sayısına, δ eksantriklik parametresine, iki parametrelili çözüm ailesini niteleyen γ_1 ve γ_2 parametrelerine göre incelenmiştir.

1. GİRİŞ

Çakışmayan eksenler etrafında dönen diskler arasındaki akışkan hareketinin incelenmesi, özellikle non-Newtonian akışkanların reolojik özelliklerini saptamak amacıyla çok sayıda araştırmacı tarafından incelenmiştir. Son birkaç yılda bu konuda yapılan çalışmalara örnek olarak, Erdoğan'ın [1,2] ve Ersoy'un [3,4] çalışmaları verilebilir. Ayrıca bu konu ile ilgili detaylı bir referans listesi, Ersoy [5] tarafından verilmiştir.

Aynı açısız hızla çakışmayan eksenler etrafında dönen diskler arasındaki viskoz bir akışkanın hareketini ilk inceleyen kişi Berker [6] olmuştur. Berker'in bu çalışması, daha sonra aynı problemi inceleyen Abbott ve Walters'ın [7] dikkatinden kaçmıştır. Bu husus, Prof. Dr. M. Emin Erdoğan tarafından kendilerine bildirilmiş ve Abbott, Bowen, Walters yayınladıkları bir makalede [8], bunu kabul etmişlerdir. Bununla birlikte Abbott ve Walters [7], simetrik çözümü düşünen ilk kişiler olmuşlardır. Daha sonra Berker [9], bu hareketi daha genel olarak iki parametrelili çözüm ailesi için incelemiştir.

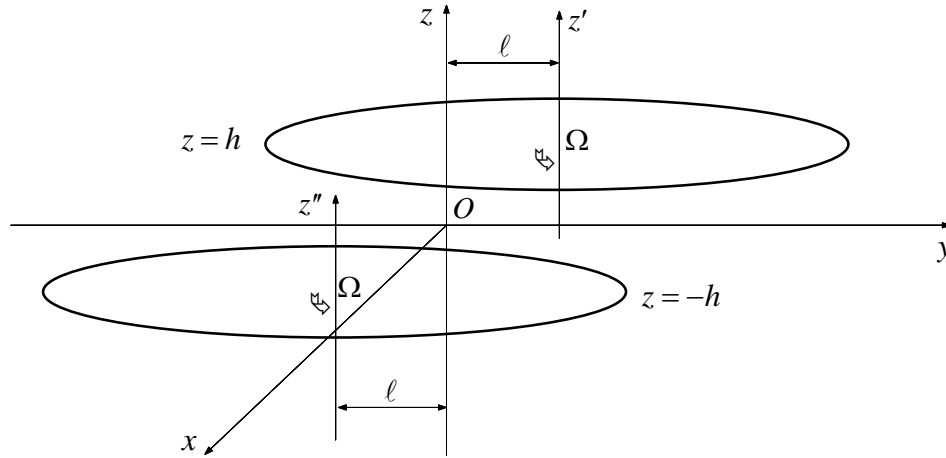
Disklerin aynı ve farklı açısız hızlarda dönmeleriyle ortaya çıkan akışkan hareketleri arasında çok önemli bazı farklar vardır. Diskler aynı açısız hızlarda dönerlerse, her $z=sabit$ düzlemindeki akışkan tabakaları disklerin açısız hızına eşit bir hızla bir nokta

etrafında katı cisim gibi dönme hareketi yaparlar ve disklere dik doğrultuda bir akım söz konusu olmaz. Disklerin farklı açısal hızlarda dönmeleri durumunda ise, bu özellik bozulur ve eksenel yönde eksenel mesafeye bağlı bir akım ortaya çıkar [10, 11].

Bu çalışmada, Berker'in [9] incelemesine bağlı kalınarak, aynı açısal hızla çakışmayan eksenler etrafında dönen diskler arasındaki klasik lineer viskoz akışkanın hareketinde hızın sıfır olduğu noktaların geometrik yeri, R hareketin Reynolds sayısına, δ eksantriklik parametresine, γ_1 ve γ_2 ile belirtilen orta düzlemde hızın sıfır olduğu boyutsuz koordinatları gösteren parametrelere bağlı olarak incelenmiştir [12]. Literatürde aynı açısal hızla dönme durumunun incelendiği makalelerde, hızın sıfır olduğu noktaların geometrik yerinin uzay eğrilerinin verilmemiş olduğu özellikle belirtilmelidir.

2. PROBLEMİN ANALİZİ

Aralarındaki boşlukta viskoz akışkan ile dolu olan ve eksantrik olarak dönen iki diskin geometrisi Şekil.1 de gösterilmiştir. $Oxyz$ eksen takımına göre $z = \mp h$ düzlemlerine yerleştirilmiş olan iki disk, Oyz düzleminde bulunan dönme eksenleri etrafında sabit Ω açısal hızıyla pozitif dönüş yönünde dönmektedirler ve dönme eksenlerinin z eksenine olan uzaklıkları ℓ ile gösterilmiştir. İki diskin arasındaki uzaklığa göre disklerin çapı çok büyüktür ve bu sebeple yan etkileri ihmal ederek problemi incelemek mümkün olabilmektedir.



Şekil1. Problemin geometrisi

İki disk aynı açısal hızla çakışmayan eksenler etrafında döndüklerinde, hız alanı Şekil.1 e göre her $z = \text{sabit}$ düzleminde, katı cisim dönmesinin ve düzlemden düzleme değişen katı cisim ötelemesinin birleşimi şeklinde belirtilir. Buna göre hız alanının kartezyen koordinatlardaki ifadesi,

$$u = -\Omega y + \Omega h f(\zeta), \quad v = \Omega x + \Omega h g(\zeta), \quad w = 0 \quad (1)$$

olarak verilir. Burada $\zeta = z/h$ olarak tanımlanmıştır ve $f(\zeta)$ ile $g(\zeta)$ fonksiyonları, sırasıyla öteleme hızının boyutsuz x ve y bileşenlerini temsil etmektedir. Hızın sıfır olduğu noktaların geometrik yeri ise,

$$x/h = -g(\zeta), \quad y/h = f(\zeta) \quad (2)$$

ile elde edilir. İki disk üzerindeki sınır şartları,

$$z = h \text{ ta} \quad u = -\Omega(y - \ell), \quad v = \Omega x, \quad w = 0, \quad (3)$$

$$z = -h \text{ ta} \quad u = -\Omega(y + \ell), \quad v = \Omega x, \quad w = 0 \quad (4)$$

olduğundan

$$f(1) = \delta, \quad f(-1) = -\delta, \quad g(1) = 0, \quad g(-1) = 0 \quad (5)$$

bulunur; burada $\delta = \ell/h$ dir ve eksantriklik parametresini göstermektedir.

Süreklilik denkleminin de bir sonucu olan ve (1) de tanımlanan hız alanı, Navier-Stokes denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \Omega^2 (x + hg) + \frac{\nu \Omega}{h} f'', \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\Omega^2 (-y + hf) + \frac{\nu \Omega}{h} g'', \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

elde edilir. Burada p değiştirilmiş basınç, ρ akışkanın yoğunluğu, ν akışkanın kinematik viskozite katsayısıdır; türevler ζ ya göre alınmıştır.

(6)-(8) denklemleri,

$$f'' + Rg = A = \text{sabit}, \quad g'' - Rf = B = \text{sabit} \quad (9)$$

diferansiyel denklemlerini verir. Burada $R = \Omega h^2 / \nu$ olup hareketin Reynolds sayısını ifade etmektedir. $\phi(\zeta) = f(\zeta) + ig(\zeta)$ fonksiyonu tanımlanarak ise hareketi yöneten denklem sayısı

$$\phi'' - iR\phi = A + iB \quad (10)$$

şeklinde bire indirgenir. Berker [9], bu denklemin çözümü için orta düzlemdeki akışkan tabakasının (x_p, y_p) gibi bir nokta etrafında döndüğünü düşünerek iki parametrelili çözüm ailesi için sonuçlar elde etmiştir. Buna göre,

$$\gamma_1 = x_p/h, \quad \gamma_2 = y_p/h \quad (11)$$

şeklinde boyutsuz parametreleri tanımlamak mümkündür. Burada γ_1 ve γ_2 , $z=0$ orta düzleminde hızın sıfır olduğu noktanın sırasıyla boyutsuz apsis ve ordinatını göstermektedir. Buna göre (10) denkleminin çözümü

$$\phi(1) = \delta, \quad \phi(-1) = -\delta, \quad \phi(0) = \gamma_2 - i\gamma_1 \quad (12)$$

şartlarıyla

$$\phi(\zeta) = \delta \frac{\sinh \kappa \zeta}{\sinh \kappa} + \frac{(\gamma_2 - i\gamma_1)}{1 - \cosh \kappa} (\cosh \kappa \zeta - \cosh \kappa) \quad (13)$$

olarak bulunur; burada $\kappa = \sqrt{R/2} (1+i)$ dir. Öteleme hızının boyutsuz x ve y bileşenleri ise

$$f(\zeta) = \delta \frac{P(1)P(\zeta) + Q(1)Q(\zeta)}{[P(1)]^2 + [Q(1)]^2} + \frac{\gamma_2 T(\zeta) + \gamma_1 S(\zeta)}{[1 - D(1)]^2 + [E(1)]^2}, \quad (14)$$

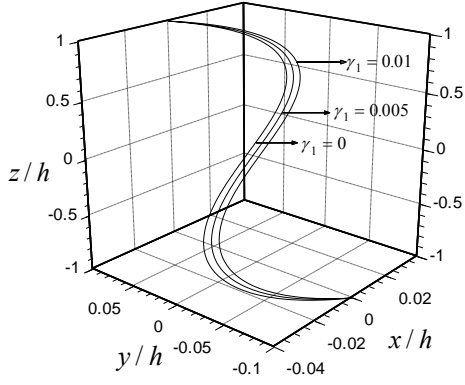
$$g(\zeta) = \delta \frac{P(1)Q(\zeta) - Q(1)P(\zeta)}{[P(1)]^2 + [Q(1)]^2} + \frac{\gamma_2 S(\zeta) - \gamma_1 T(\zeta)}{[1 - D(1)]^2 + [E(1)]^2} \quad (15)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

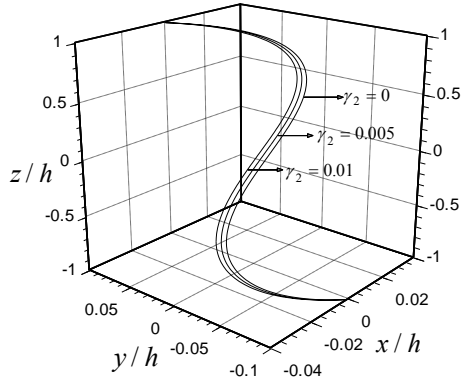
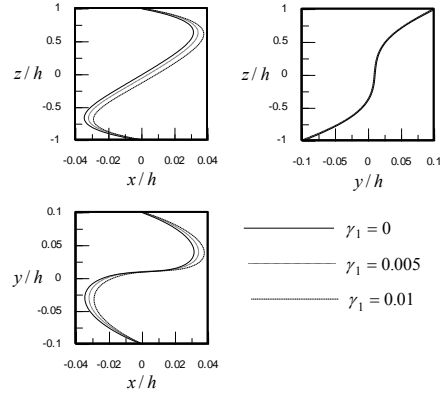
$$\begin{aligned} P(\zeta) &= \sinh \sqrt{R/2} \zeta \cos \sqrt{R/2} \zeta, & Q(\zeta) &= \cosh \sqrt{R/2} \zeta \sin \sqrt{R/2} \zeta, \\ D(\zeta) &= \cosh \sqrt{R/2} \zeta \cos \sqrt{R/2} \zeta, & E(\zeta) &= \sinh \sqrt{R/2} \zeta \sin \sqrt{R/2} \zeta, \\ T(\zeta) &= [D(1)]^2 - D(1) + [E(1)]^2 + D(\zeta) - D(1)D(\zeta) - E(1)E(\zeta), \\ S(\zeta) &= E(\zeta) - E(1) + E(1)D(\zeta) - D(1)E(\zeta) \end{aligned} \quad (16)$$

dir. (9) denklemindeki A ve B sabitleri ise,

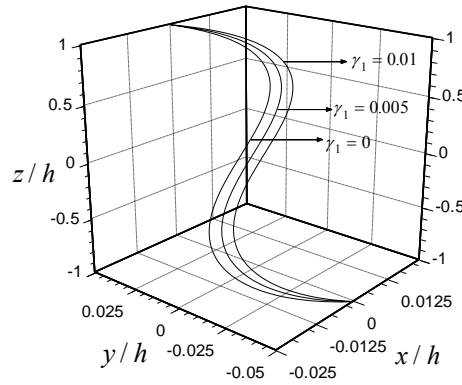
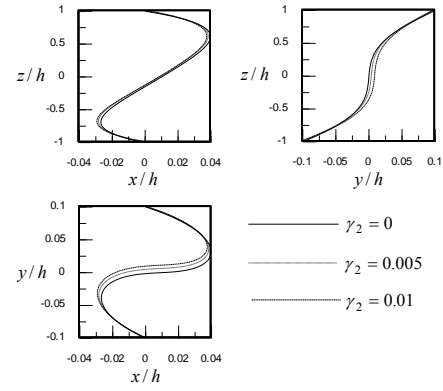
$$A = \frac{R}{[1 - D(1)]^2 + [E(1)]^2} \left\{ \gamma_1 [D(1) - D^2(1) - E^2(1)] - \gamma_2 [E(1)] \right\}, \quad (17)$$



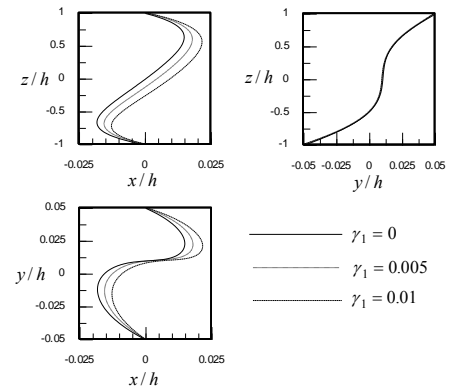
(a) $R = 10, \delta = 0.1, \gamma_2 = 0.01$



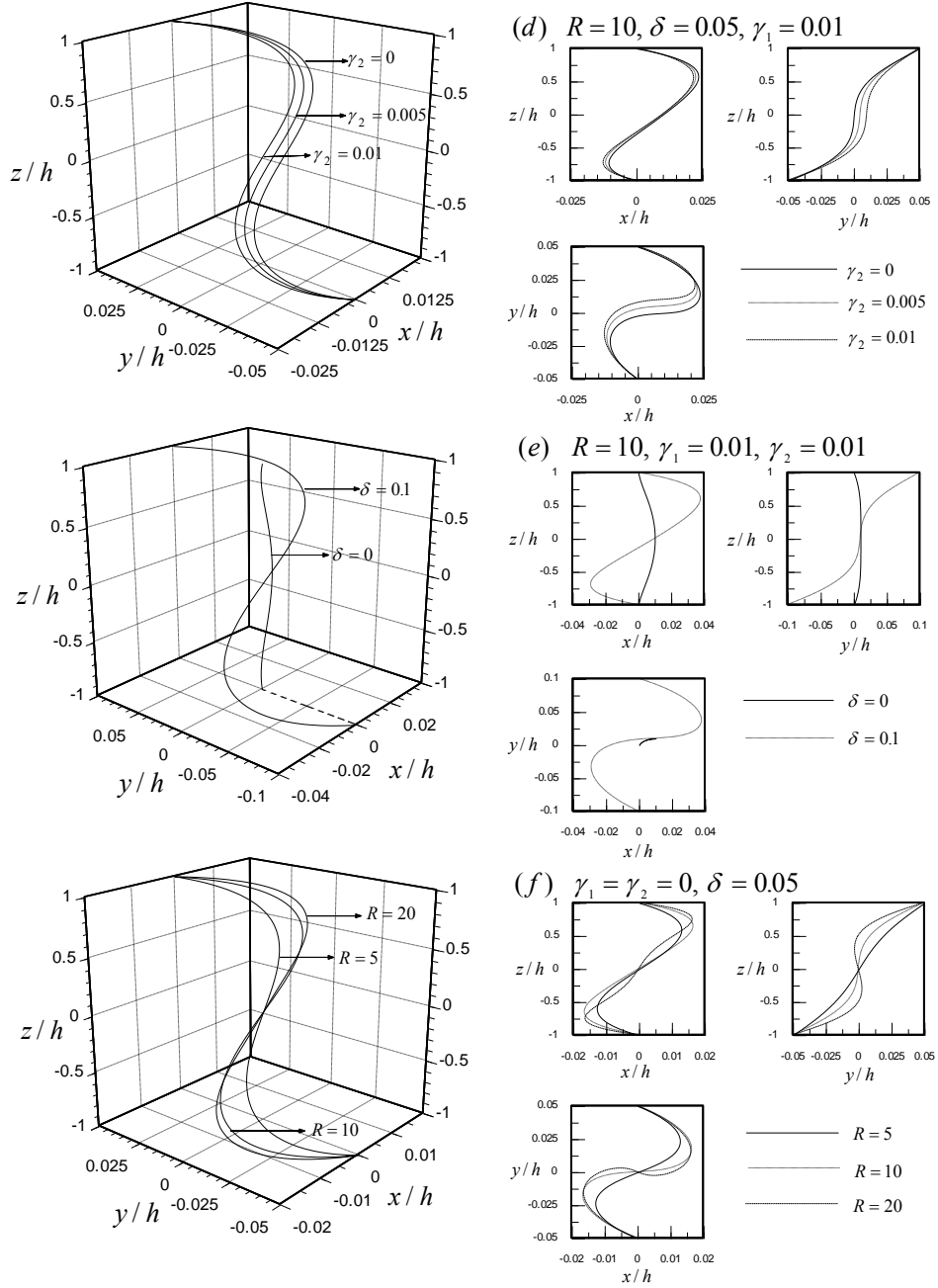
(b) $R = 10, \delta = 0.1, \gamma_1 = 0.01$



(c) $R = 10, \delta = 0.05, \gamma_2 = 0.01$



Şekil 2 a-c. Hızın sıfır olduğu yerlerin uzaydaki eğrileri ve izdüşümleri



Şekil 2 d-f. Hızın sıfır olduğu yerlerin uzaydaki eğrileri ve izdüşümleri

$$B = \frac{R}{[1-D(1)]^2 + [E(1)]^2} \left\{ \gamma_1 [E(1)] + \gamma_2 [D(1) - D^2(1) - E^2(1)] \right\} \quad (18)$$

olarak bulunur.

3. SONUÇLAR

İki diskin çakışmayan eksenler etrafında aynı açısal hızla dönmeleri sonucu oluşan sıkıştırılmayan viskoz akışkanın hareketinde, hızın sıfır olduğu noktaların uzay eğrileri ve düzlemler üzerindeki izdüşümleri Şekil.2.a-f de gösterilmiştir. Bu uzay eğrileri, dönme merkezlerini birbirine bağlayan eğriler olmakla birlikte, asla bir doğru değildir. Eksantrikliğin y -ekseni üzerinde olması sebebiyle, bu uzay eğrilerinin $y/h-z/h$ düzlemleri üzerindeki izdüşümleri $[-\delta, \delta]$ aralığındadır. Bu uzay eğrilerindeki en ilginç sonucun, x -ekseni boyunca eksantrikliğin olmamasına rağmen, uzay eğrilerinin $x/h-z/h$ düzlemleri üzerinde izdüşümü olmasıdır. Doğal olarak γ_1 parametresinin etkisi $x/h-z/h$ izdüşüm eğrilerinde, γ_2 parametresinin etkisi ise $y/h-z/h$ izdüşüm eğrilerinde belirgin şekilde görülmektedir. Şekil.2.e deki $\delta = 0$ için çizilen uzay eğrisi ve izdüşüm eğrileri konsantrik dönmeyi temsil etmektedir. Simetrik durumda, akışkan katı cisim gibi dönme hareketi yapacağından dolayı, özel olarak bu eğri z -ekseni ile çakışık olarak disklerin dönme eksenlerini birleştirir. Şekil.2.f deki tüm grafikler ise, Reynolds sayısının etkisiyle birlikte, özel bir hareket olan "*eksantrik simetrik dönme*" hareketini temsil ederler. Bu nedenle, uzay eğrileri ve izdüşümleri simetriklerdir. Şekil.2.f deki bu grafiklerden açıkça görüldüğü gibi, Reynolds sayısının artmasıyla disklere yakın bölgede bir sınır tabaka oluşur. Bu da yaklaşık olarak z -ekseni etrafında dönen akışkan tabakalarının oluşturduğu $z=0$ düzlemine yakın olan bölgenin hacim olarak büyümesine neden olur.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana öneren çok değerli hocam sayın Prof. Dr. M. Emin Erdoğan'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

KAYNAKLAR

- [1] ERDOĞAN M.E., "Flow due to Parallel Disks Rotating about Non-coincident Axis with One of Them Oscillating in its Plane", Int. J. Non-Linear Mech., v.34, 1019-1030, 1999.
- [2] ERDOĞAN M.E., "Unsteady Flow between Two Eccentric Rotating Disks Executing Non-Torsional Oscillations", Int. J. Non-Linear Mech., v.35, 691-699, 2000.
- [3] ERSOY H.V., "MHD Flow of an Oldroyd-B Fluid between Eccentric Rotating Disks", Int. J. Engrg. Sci., v. 37, 1973-1984, 1999.
- [4] ERSOY H.V., "Unsteady Flow due to a Sudden Pull of Eccentric Rotating Disks", Int. J. Engrg. Sci., v.39, 343-354, 2001.
- [5] ERSOY H.V., "MHD Flow of an Oldroyd-B Fluid due to Non-Coaxial Rotations of a Porous Disk and the Fluid at Infinity", Int. J. Engrg. Sci., v.38, 1837-1850, 2000.
- [6] BERKER R., "Intégration des Équations du Mouvement d'un Fluide Visqueux Incompressible", Handbuch der Physik, v.VIII/2, 87-88, 1963.

- [7] ABBOTT T.N.G., WALTERS K., "Rheometrical Flow Systems: Part2. Theory for the Orthogonal Rheometer, Including an Exact Solution of the Navier-Stokes Equations", J. Fluid Mech., v.40, 205-213, 1970.
- [8] ABBOTT T.N.G., BOWEN G.W., WALTERS K., "Some Suggestions for New Rheometer Designs I. Theory", J. Phys. D: Appl. Phys., v.4, 190-203, 1971.
- [9] BERKER R., "An Exact Solution of the Navier-Stokes Equation: The Vortex with Curvilinear Axis", Int. J. Engng Sci., v.20, 217-230, 1982.
- [10] LAI C.Y., RAJAGOPAL K.R., SZERI A.Z., "Asymmetric Flow between Parallel Rotating Disks", J. Fluid Mech., v.146, 203-225, 1984.
- [11] RAJAGOPAL K.R., "Flow of Viscoelastic Fluids between Rotating Disks", Theoret. Comput. Fluid Dynamics, v.3, 185-206, 1992.
- [12] ERSOY H.V., "Çakışmayan Eksenler Etrafında Dönen İki Disk Arasındaki Akışkanın Daimi ve Zamana Bağlı Hareketleri", Doktora Tezi, Makina Fakültesi, İ.T.Ü., 2000.