yönelik bilgiler verilerek, bir uygulama ile Dünya haritasının çizdirilmesi konusu açıklanacaktır.

2. McBRYDE-THOMAS PROJEKSİYONU

McBryde-Thomas projeksiyonu gerçek anlamda olmayan, alan koruyan, silindirik bir projeksiyondur. 33° 45′ kuzey ve güney paralel dairelerin uzunluğu korunur. Yani projeksiyonun sadece bu paralel daireler boyunca ölçeği doğrudur. Herhangi bir paralel daire boyunca ölçek sabittir. Orta meridyen ekvatorun 0.45 katı uzunluğunda düz doğru şeklinde gösterilir. Diğer meridyenler dördüncü dereceden denklemlerle ifade edilen ve orta meridyene doğru eşit aralıklı konkav eğriler şeklindedir. Bu nedenle *'dördüncü dereceden'* anlamını ifade eden *'kuartik'* adı ile anılır. Paralel daireler eşit aralıklı olmayan ve ekvatora doğru araları açılan, orta meridyene dik doğrular biçiminde gösterilir.

McBryde-Thomas projeksiyonu orta meridyene göre simetrik bir projeksiyondur. Eşit boylam aralıklı meridyenler paralel daireler üzerinde eşit parçalar ayırır. Kutuplar,, ekvatora paralel ve ekvatorun üçte biri uzunluğunda doğru parçası şeklinde gösterilir. *'Basık kutuplu'* ismi ile anılmasının nedeni de budur.

Projeksiyon eşitlikleri

$$x = 2\left(3^{1/2}\right)R\frac{sin\left(\theta/2\right)}{\left(2+2^{1/2}\right)^{1/2}}$$

$$y = R\left(\lambda-\lambda_0\right)\frac{1+2\,cos\,\theta\,/\,cos\left(\theta/2\right)}{\left[3\left(2^{1/2}\right)+6\right]^{1/2}} \tag{1}$$

şeklinde verilmektedir [1].

Eşitliklerde yer alan θ açısal büyüklüğü ise

$$sin\left(\theta/2\right)+sin\,\theta=\left(1+2^{1/2}\,/\,2\right)sin\,\varphi \tag{2}$$

kapalı denklemi ile ifade edilmektedir. Projeksiyonun x,y dik koordinatlarının hesabı için öncelikle (2) denkleminden θ parametresinin çözülmesi gerekir. Burada x koordinatı dik koordinat sisteminin absisini, y koordinatı ise ordinatını ifade etmektedir.

Projeksiyon eşitliklerinde yer alan sabit değerler

$$A=\left(1+2^{1/2}\,/\,2\right)=1.707106781$$

$$B=\frac{1}{\left[3\left(2^{1/2}\right)+6\right]^{1/2}}=0.3124597141$$

$$C=\frac{2\left(3^{1/2}\right)}{\left(2+2^{1/2}\right)^{1/2}}=1.874758285$$

olarak atanır ve eşitliklerde yerlerine konursa projeksiyon eşitlikleri

$$\begin{aligned} x &= CR\,sin(\theta/2) \\ y &= BR(\lambda-\lambda_0)[1+2cos\,\theta\,/\,cos(\theta/2)] \end{aligned} \tag{3}$$

ve

$$sin(\theta/2)+sin\,\theta=A\,sin\,\varphi \tag{4}$$

şeklinde daha yalın bir formda elde edilir.

3. PROJEKSİYON DİK KOORDİNATLARININ HESABI

Lineer olmayan (4) denkleminin çözümü için yaklaşık sayısal yöntemler kullanılabilir. Bu yöntemler ise genellikle ardışık yaklaşım veya lineerleştirme esasına dayanırlar. Newton-Raphson yöntemi de ardışık yaklaşıma dayanan bir iterasyon yöntemidir. Yöntemin esası fonksiyon yerine, bir başlangıç değerinden başlanarak fonksiyonun Taylor serisi açılımında birinci mertebeden terimlerini almaya dayanır [2].

Yani; $f(x)=0$ kapalı denklemi için $x_i=x_0$ gibi bir başlangıç değerinden başlanarak

$$\Delta x_i=-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{5}$$

değerleri hesaplanır. Bu değer, ε gibi bir hata sınırı değeri ile karşılaştırılır. Eğer

$$|\Delta x_i|\langle\varepsilon \tag{6}$$

değilse, bir sonraki iterasyon adımında $x_{i+1}=x_i+\Delta x_i$ olacaktır. İterasyona kök (Δx_i) için izin verilen en büyük hatadan (ε) küçük oluncaya kadar devam edilir. (6) koşulunu sağlayan x_i değeri aranan değerdir.

McBryde-Thomas projeksiyonunda (2) denklemi

$$f(\theta)=sin(\theta/2)+sin\,\theta-\left(1+2^{1/2}/2\right)sin\,\varphi=0 \tag{7}$$

kapalı fonksiyonu şeklinde yazılabilir. (7) fonksiyonunun birinci türevi

$$f'(\theta) = \frac{1}{2} cos(\theta/2) + cos\,\theta \qquad (8)$$

olur. Herhangi bir φ_i enlemi için başlangıç değeri $\theta_0 = \varphi_i$ alınarak (7) ve (8) denklemlerinde yerine konularak

$$\Delta\theta_i = -\frac{f(\theta_i)}{f'(\theta_i)} \qquad (9)$$

değeri hesaplanır. Bu değer seçilen bir hata sınırı değeri ile (Örneğin $\varepsilon = 10^{-9}$) karşılaştırılır. Eğer büyükse

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta_i \qquad (10)$$

alınarak iterasyona devam edilir. (6) koşulunu sağlayan θ_i değeri (1) eşitliklerinde yerine konularak projeksiyon koordinatları hesaplanır.

4. McBRYDE-THOMAS PROJEKSİYONUNDA DÜNYA HARİTASININ ÇİZİMİ

McBryde-Thomas projeksiyonunda bir dünya haritası çizdirilmek amacıyla öncelikle Merkator projeksiyonunda çizilmiş mevcut bir dünya haritası üzerinden kara parçalarının kıyı sınırları yeterli sıklıkta sayısallaştırılmıştır. Sayısallaştırma işleminde ekvator, seçilen koordinat sisteminin y-ekseni, orta meridyen ise sistemin x-ekseni, orta meridyen ve ekvatorun kesim noktası sistemin orijini olarak kabul edilmiştir. Sayısallaştırılan haritanın ölçeği, haritada ekvator üzerinde $\Delta\lambda$=120° boylam farkına karşılık gelen S uzunluğu ölçülerek

$$M = S\frac{360^\circ}{2\pi R\Delta\lambda} \qquad (11)$$

eşitliğinden hesaplanmıştır. x ve y sayısallaştırılan resim koordinatları, R=6370 km yerküresi yarıçapı olmak üzere coğrafi koordinatlar, Merkator projeksiyonu denklemlerinden geri çözümle

$$\lambda = \frac{yM}{R}$$
$$\delta = 2\,arctan\left[e^{-\frac{x}{R}M}\right] \qquad (12)$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta$$

eşitliklerinden radyan biriminde hesaplanmıştır. Hesaplanan koordinatlar, ardışık nokta numarası verilerek kıyı çizgileri datası olarak yaratılan ASCII formatında bir dosyada depolanmıştır. 10° aralıklı bir coğrafi ağı tanımlayan bir data dosyası oluşturularak mevcut dosyaya eklenmiştir. (Toplam 65703 nokta) Sayısallaştırma esnasında kıyı çizgilerini tanımlayan noktaların ardışık nokta numaraları dizisi, bir nokta birleştirme kütüğü olarak yine ASCII formatında ayrı bir dosyaya kaydedilmiştir. Elde edilen coğrafi koordinatlardan, yukarıda verilen eşitlikler ve iterasyon algoritması kullanılarak McBryde-Thomas projeksiyonu dik koordinatları yazılan bir bilgisayar programı altında hesaplanmıştır. Bilgisayarda hesaplamada, başlangıç değeri önce $\varphi_0=0^o$ ve daha sonra $\varphi_0=\varphi_i$ alınarak iterasyon adımları saydırılmıştır.

İterasyonda başlangıç değeri seçiminde;

$60^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ enlem aralığında $\varphi_0 = \varphi_i + 7^\circ$

$30^\circ < \varphi \leq 60^\circ$ enlem aralığında $\varphi_0 = \varphi_i + 4^\circ$

$0^\circ < \varphi \leq 30^\circ$ enlem aralığında $\varphi_0 = \varphi_i + 1^\circ$

alınması durumunda iterasyonun daha çabuk yakınsadığı belirlenmiştir.

Projeksiyon dik koordinatlarının hesabında yeterli inceliğin sağlanabilmesi için iterasyonda kullanılacak hata sınırı değerinin 10^{-9} olarak alınması önerilmektedir. Zira hata sınırının 10^{-9}alınması ile örneğin 10^{-4} olarak alınması arasında koordinatların birbirlerinden ±50m farklı olarak bulunduğu tesbit edilmiştir. Başlangıç değeri ve hata sınırının seçimi için yapılan bu öngörüler sadece McBryde-Thomas projeksiyonu için geçerlidir.

Hesaplanan koordinatlar, nokta birleştirme dosyası ile birlikte bir bilgisayar programı altında .SCR uzantılı yine ASCII formatında bir script dosya şeklinde düzenlenmiş ve AutoCAD ortamına aktarılarak çizim alınmıştır. McBryde-Thomas projeksiyonunda çizdirilen 1:300000000 ölçeğindeki dünya haritası Şekil 1.'de görülmektedir.

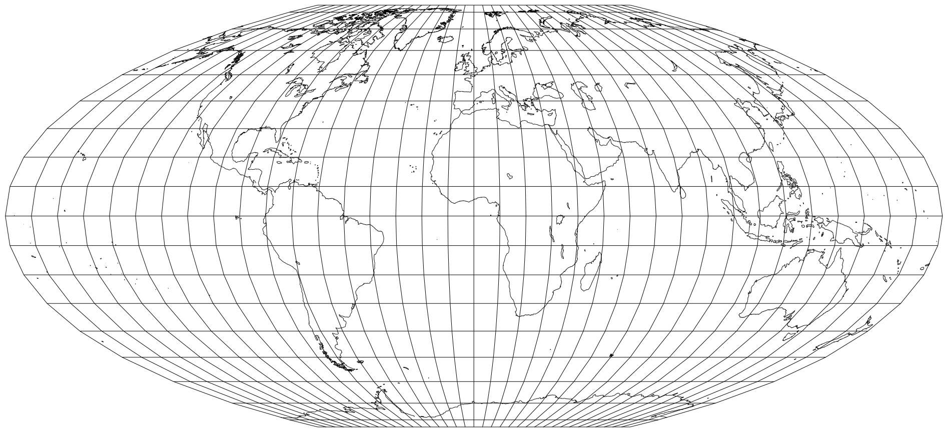
5. DEFORMASYON ANALİZİ

Literatürde, yeryuvarının bütününün gösteriminde

- Açı koruyan gerçek anlamda olmayan projeksiyonların
- Kutup noktasının doğru parçası şeklinde ve haritadaki uzunluğunun ekvatorun haritadaki uzunluğundan daha kısa olarak gösterildiği projeksiyonların
- Meridyen ve paralel dairelerin eğriler şeklinde gösterildiği projeksiyonların
- Deformasyon değerlerinin tüm coğrafi pafta ağı içerisinde homojen olarak dağıldığı projeksiyonların

en uygun projeksiyon olarak değerlendirilmesi gerektiği belirtilmektedir [3],[4].

McBryde-Thomas projeksiyonu, bu kriterler ışığında ele alındığında her ne kadar gerçek anlamda olmayan alan koruyan bir projeksiyon olsa da ve ayrıca paralel daireler doğru olarak gösterilse de yeryuvarının bütününün gösterimi için uygun projeksiyonlar grubunda değerlendirilmektedir. Bu amaçla McBryde-Thomas projeksiyonunda bir deformasyon analizi yapılarak sonuçları verilmiştir.



Şekil 1. McBryde-Thomas projeksiyonunda Dünya haritası 7
(Ölçek 1:300000000)

Kartografik projeksiyonlarda (R=1.0) birim küre için meridyen doğrultusu boyunca uzunluk deformasyonu katsayısı

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2} \tag{13}$$

ve paralel daireler yönündeki uzunluk deformasyonu katsayısı

$$k = \frac{1}{cos\,\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2} \tag{14}$$

alan deformasyonu katsayısı ise

$$p = \frac{1}{cos\,\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) \tag{15}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır [3].

Gerçek anlamda olmayan projeksiyonlarda ana deformasyon doğrultuları meridyen ve paralel daire doğrultuları ile çakışık değildir. Bu nedenle ana deformasyon yönlerindeki maksimum ve minimum deformasyon katsayılarının (a ve b) hesabı için sırasıyla

$$K = a + b = \left(h^2 + k^2 + 2p\right)^{1/2}$$

$$L = a - b = \left(h^2 + k^2 - 2p\right)^{1/2} \tag{16}$$

$$a = \frac{K+L}{2}$$

$$b = \frac{K-L}{2}$$

eşitlikleri kullanılacaktır [5].

McBryde-Thomas projeksiyonunda coğrafi enlem, θ parametresine bağlı bir değişken olduğu için kısmi diferansiyeller

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \tag{17}$$

şeklinde zincir kuralı ile ifade edilecektir [2].

Burada, yine (R=1.0) birim küre için

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{1}{2} C\, cos(\theta/2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = B\lambda\left[\frac{cos\,\theta}{cos(\theta/2)} tan(\theta/2) - 2\frac{sin\,\theta}{cos(\theta/2)}\right] \tag{18}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{A\,cos\,\varphi}{(1/2)cos(\theta/2) + cos\,\theta}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{CA}{2}\frac{cos(\theta/2)cos\,\varphi}{(1/2)\frac{1}{2}cos(\theta/2) + cos\,\theta}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{BA\lambda \cos\varphi}{(1/2)\cos(\theta/2)+\cos\theta}\left[\frac{\cos\theta}{\cos(\theta/2)}\tan(\theta/2)-2\frac{\sin\theta}{\cos(\theta/2)}\right] \quad (19)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=0$$

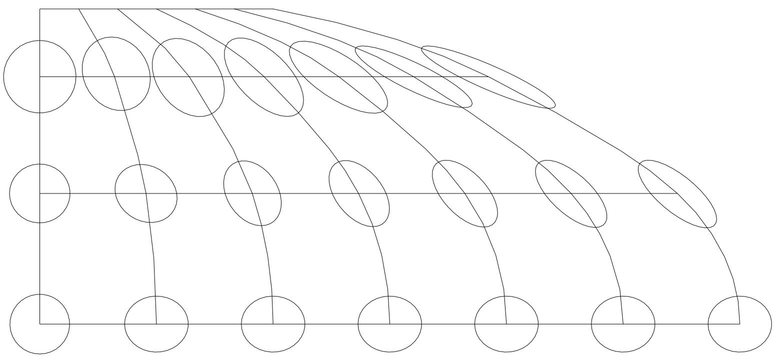
$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}=B\left[1+\frac{2\cos\theta}{\cos(\theta/2)}\right] \quad (20)$$

olur. (19) ve (20) eşitlikleri (15) eşitliğinde yerine konduğunda McBryde-Thomas projeksiyonu için alan deformasyonu katsayısı

$$p=CBA=1.0 \quad (21)$$

olarak elde edilecektir.

Kuzey-Doğu çeyrek küreyi tanımlayan 20'şer derece enlem ve boylam aralıklı bir data dizisi için deformasyon katsayıları hesaplanmış ve Tablo 1.'de verilmiştir. Kuzey-doğu çeyrek küre için 30'ar derece aralıklı bir coğrafi pafta ağı üzerinde deformasyon elipsleri çizdirilerek Şekil 2.'de verilmiştir.



Şekil 2. McBryde-Thomas Projeksiyonunda deformasyon elipsleri (Çeyrek yarıküre için)

kuzey ve güney enlemleri boyunca ölçek korunmaktadır yani bu doğrultularda haritanın ölçeği ile orantılı olarak uzunluk korunmaktadır. Diğer enlemlerde paralel daireler doğrultusunda ölçek sabit bir değerde olup değişmemektedir fakat haritanın ölçeğine eşit değildir. Yüksek enlemlerde yani ekvatordan kutuplara yaklaştıkça ve dış meridyenlere doğru yani orta meridyenden uzaklaştıkça deformasyon artar. Fakat bu bölgelerdeki deformasyonun yine de kutupların nokta olarak gösterildiği projeksiyonlara nazaran daha küçük olduğu bir gerçektir. Bu anlamda, McBryde Thomas projeksiyonu yer kürenin tümüne ait gösterimlerde tercih edilebilecek bir projeksiyon türü olarak ele alınmalıdır. Kendi sınıfındaki projeksiyon türleri ile karşılaştırılması yeni bir araştırma konusu olmalıdır.

Yerküreye ait çizgisel bilgilerin mevcut haritalardan sayısallaştırılıp yeni ve farklı bir projeksiyon türünde ifade edilmesi geri çözümle mümkündür. İnvers çözüm olarak da adlandırılan bu çözüm karmaşık eşitliklere sahip bazı projeksiyonlar için her zaman basit olmayabilir. Bu durumda iterasyon algoritmalarına başvurulabilir.

Lineer olmayan kapalı denklemlerle ifade edilen projeksiyon eşitliklerinin çözümünde Newton-Raphson iterasyon yöntemi en uygun ve kolay yöntemdir. Bilgisayarlarda işlemcilerin hızlarının artması ile iterasyonun çabuk yakınsaması amacıyla başlangıç değerinin uygun seçilmesi şeklinde bir arayışa da aslında artık pek gerek kalmamıştır. Fakat yine de, McBryde-Thomas projeksiyonu ile yapılacak uygulamalarda iterasyon konusunda bu çalışmada önerilen başlangıç değerlerine itibar edilmesinin hesaplamalarda bir hız kazandıracağı açıktır

KAYNAKLAR

[1] Snyder, J.P., Voxland, P.M.; “An Album of Map Projections”, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, Washington, Government Printing Office, 1989

[2] Korn, G.A., Korn, T.M.; “Mathematical Handbook for Scientists and Engineers”, McGraw-Hill Book Company, Second Edition,1968

[3] Francula, N.; “Die Vorteilhaftesten Abbildungen in der Atlaskartographie”, Dissertation, Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universitaet, Bonn, 1971

[4] Özgen,M.G., Uçar, D.; “Yeryuvarı Bütününe ait Haritalar için En Uygun Projeksiyonların Araştırılması”, Harita Dergisi, Sayı:88, Ocak 1982,s:1-11

[5] Uçar,D., İpbüker,C.; “Kartografik Projeksiyonlarda Deformasyon Elipslerinin Görselleştirilmesi”, Harita Dergisi,Sayı:119, Ocak 1998, s;30-44