ARAŞTIRMA MAKALESİ

ÇOK BİLEŞENLİ LİNEER OLMAYAN SÜPER ÇÖZÜLEBİLİR SİSTEMLER

Devrim YAZICI

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş Tarihi: 15.08.2001

MULTI COMPONENT NON-LINEAR SUPER INTEGRABLE SYSTEMS

SUMMARY

It is shown that a new class of classical multicomponent super KdV equations is bi-super Hamitonian by extending the method of verification of graded Jacobi identity. The third super Hamiltonian in the multicomponent super Kdv hierarchy is obtained and the corresponding members of evolution equations are given. The multicomponent super mKdV equation is obtained by define the multicomponent super Miura transformation.

ÖZET

Yeni çözülebilir bir sistem olan çok bileşenli süper KdV denkleminin bi-hamilton yapıya sahip olduğu graded-Jacobi özdeşliğinin sağlanması ile gösterilmiştir. Çok bileşenli süper KdV hiyerarşisindeki üçüncü Hamilton elde edilerek karşılık gelen zaman evrim denklemleri verilmiştir. Çok bileşenli süper Miura dönüşümü tanımlanarak çok bileşenli süper mKdV denklemi elde edilmiştir.

1.GİRİŞ

Doğadaki bir çok olayın anlaşılması için yapılan modeller lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler içermektedir. Fiziğin bir çok dallarında örneğin, lineer olmayan optik, hidrodinamik, katıhal fiziği, plazma fiziği, yüksek enerji fiziği gibi geniş bir alandaki fiziksel olayların incelenmesinde lineer olmayan sistemler karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle son yıllarda lineer olmayan sistemlerin tamamen çözülebilirliği fizikçiler ve matematikçilerin bir çalışma alanını oluşturmaktadır [1,2]. Tamamen çözülebilirliği bir kaç farklı yöntem ve yaklaşımla incelemek mümkündür [3]. Bu kısımda literatürde çok iyi bilinen ve (1+1) boyutta tamamen çözülebilen lineer olmayan diferansiyel denklem olan Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ele alınacaktır. KdV denklemi ilk defa 1895'te D.J. Korteweg ve öğrencisi G. de Vries sığ su dalgalarını incelerlerken elde edilen

$$u_t = u_{xxx} + uu_x \tag{1}$$

şeklinde bir denklemdir [4]. Burada ve bundan sonraki formülasyonlarda x ve t alt indisleri sırası ile $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial t}$ göre kısmi türevleri göstermektedir. (1+1) boyuttaki bu lineer olmayan kismi türevli diferansiyel denklemin bir çözümü;

$$u = 3c\,\mathrm{sech}^2\frac{\sqrt{c}}{2}\left(x + ct\right)$$

şeklinde şekil değiştirmeden c hızı ile ilerleyen bir dalgayı tanımlamaktadır. Bu tür çözümlere soliton çözümleri adı verilmektedir. Tamamen çözülebilirlik kriterleri ile ilgili her yeni formülasyon genellikle KdV denklemi üzerinde sınanmaktadır. Örneğin fermiyonik değişkenlerin ithali ile KdV denkleminin süper ve süpersimetrik genelleştirmesi yapılarak tamamen çözülebilir süper denklemler incelenmeye başlanmıştır [5,6,7,8,9].

Genellikle tamamen çözülebilir sistemler (1+1) boyutta incelenmektedir. Fizikte karşılaştığımız (3+1) boyuttaki denklemlerde tamamen çözülebilirliğin gösterilmesi güncel problemlerden birisidir. Bir diğer yönde yapılan güncel çalışmalar ise çok bileşenli tamamen çözülebilir sistemlerin elde edilmesidir. Çok bileşenli KdV denklemi son yıllarada bir çok çalışmanın odağı olmuştur [10,11]. Bu çalışmada super KdV denkleminin çok bileşenli super KdV denklemine genelleştirilmesi ve sistemin çözülebilirliği bi-Hamilton yapı incelenerek elde edilmiştir.

2. KdV denklemi için Hamilton Formalizmi

Sürekli dinamik bir sistemin hareket denklemi,

$$u_t = \{u, H\} = J\,\frac{\delta H}{\delta u} \tag{2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada J diferansiyel operatör ve H uygun bir fonksiyonel olmak üzere $\frac{\delta}{\delta u}$ fonksiyonel türeve (Euler operatörü) karşılık gelmektedir. Genel olarak, P ve Q fonksiyoneller olmak üzere,

$$\{P, Q\} = \int \delta P \cdot J\delta Q\, dx \tag{3}$$

ile verilir. KdV denklemi için, temel Poisson parantezleri,

$$\{u(x), u(y)\}_1 = J_1\delta(x, y) = \partial_x^3 + \frac{1}{3}\left(\partial_x u + u\partial_x\right)\delta(x, y) \tag{4a}$$

$$\{u(x), u(y)\}_2 = J_2\delta(x, y) = \partial_x\delta(x, y) \tag{4b}$$

şeklinde tanımlanır. J_1 ve J_2 operatörlerinin Hamilton operatörleri olabilmeleri için aşağıdaki iki özelliği sağlamalıdır:

i) Skew-simetri(Eğik simetri)

$$\{P, Q\} = -\{Q, P\} \tag{5}$$

ii) Jacobi özdeşliği

$$\{\{P,Q\},R\}+\{\{R,P\},Q\}+\{\{Q,R\},P\}=0 \tag{6}$$

J_1 ve J_2 operatörleri birinci özelliği sağladıkları (3) denkleminden kısmi integrasyon yapılarak kolayca görülebilir. İkinci özellik olan Jacobi özdeşliğini sağladığını göstermek basit bir operatör için bile oldukça karmaşık ve zor olabilir. Bu nedenle (6) denklemini değişik bir formda yazmak daha uygundur. Bu amaçla J (3) denkleminde ki Poisson parantezini sağlayan bir operatör ve $\hat{v}_H$ Hamilton vektör alanı olmak üzere,

$$\mathrm{Pr}\,\hat{v}_H(P)=\{P,H\}=\mathrm{Pr}\,\hat{v}_{E(H)}(P) \tag{7}$$

denklemi bütün fonksiyoneller için sağlanır[11]. Burada $E(H)=\dfrac{\delta H}{\delta u}$ ile verilir. Böylece (6) denkleminde ki Jacobi özdeşliğinin ilk terimi,

$$\{\{P,Q\},R\}=\mathrm{Pr}\,\hat{v}_R\left(\int P\cdot JQ\,dx\right)=\int \mathrm{Pr}\,\hat{v}_R(P\cdot JQ)dx \tag{8}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer iki terimde benzer şekilde yazılarak (6) denklemi,

$$\int\left[P\cdot \mathrm{Pr}\,\hat{v}_{JR}(J)Q+R\cdot \mathrm{Pr}\,\hat{v}_{JQ}(J)P+Q\cdot \mathrm{Pr}\,\hat{v}_{JP}(J)R\right]dx=0 \tag{9}$$

şeklini alır. (9) denkleminin sol tarafı ,

$$\Psi=\frac{1}{2}\int \theta\wedge \mathrm{Pr}\,\hat{v}_{J\theta}(J)\wedge\theta\;dx \tag{10}$$

ile verilen tri-vektöre(üçlü-vektör) özdeş olmaktadır[11]. Burada $\wedge$ dış çarpımı tanımlamak üzere $\mathrm{Pr}\,\hat{v}_{J\theta}$ diferansiyel operatörü,

$$\mathrm{Pr}\,\hat{v}_{J\theta}=\sum_{\alpha,j}(J)_j\left(\sum_{\beta}J_{\alpha\beta}\theta^{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial u_j^{\alpha}} \tag{11}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece Jacobi özdeşliği için genel tanım; J skew-simetrik bir diferansiyel operatör ve $\Theta=\frac{1}{2}\int(\theta\wedge J\theta)dx$ fonksiyonel bi-vektöre(ikili-vektör) karşılık gelirse, J operatörünün Hamilton operatörü olabilmesi için,

$$\mathrm{Pr}\,\hat{v}_{J\theta}(\Theta)=\frac{1}{2}\int\left(\theta\wedge \mathrm{Pr}\,\hat{v}_{J\theta}(J)\wedge\theta\right)dx=0 \tag{12}$$

ile verilen Jacobi özdeşliğini sağlaması gerekir. Bundan sonraki bölümlerde Jacobi özdeşliği (6) denklemi yerine (12) denklemi ile yapılacaktır. Örnek olarak (3) denklemlerinde KdV deneklemi için verilen J_1 ve J_2 operatörlerini ele alalım. Burada J_2'nin çok kolay bir şekilde (12) denklemini sağladığı görülebilir. Aynı şekilde J_1 için birkaç ara işlemden sonra,

$$\Pr \hat{v}_{J_1\theta}(\Theta) = \frac{1}{2}\int \left[(\theta_{xx} \wedge \theta_x \wedge \theta_x) - (\theta_{xx} \wedge \theta_{xx} \wedge \theta) - (\theta_{xx} \wedge \theta_x \wedge \theta_x)\right] dx = 0 \tag{13}$$

bulunarak, Jacobi özdeşliği sağlanmış olur. Böylece J_1 ve J_2 operatörlerinin Hamilton operatörleri olduğu söylenir.

3. Süper KdV ve mKdV Denklemi

Son yıllarda çözülebilir sistemlerin (özellikle KdV denkleminin) süper ve süpersimetrik genelleştirmeleri üzerine çalışmalar yapılmaktadır[8,11,12]. Süper çözülebilir sistemler bozonik ve fermiyonik değişkenleri olan fakat bu değişkenler arasında süper simetri dönüşümleri olamayan sistemlerdir. Süper simerik çözülebilir sistemler ise bozonik ve fermiyonik değişkenleri arasında süpersimetri dönüşümleri olan sistemlerdir[9,13]. Süper KdV denklemi ilk olarak Kupershmidth (1984) tarafından elde edilmiştir. Bu denklem sistemi,

$$L = \frac{1}{2}(\phi_x\phi_t + \xi\xi_t) - \left(\phi_x^3 + \frac{1}{2}\phi_{xx}^2\right) - 3\phi_x\xi\xi_x - 2\xi_x\xi_{xx} \tag{14}$$

ile verilen Lagrangian'den elde edilebilir. Burada $\phi_x(x,t) = u(x,t)$ hız potansiyeli ve bozonik bir büyüklüğe karşılık gelmektedir. ξ ise fermiyonik bir büyülük olup $\xi^2 = 0$ ve $\xi_1\xi_2 = -\xi_2\xi_1$ (ξ_1 ve ξ_2 iki ayrı fermiyonik büyüklüğü göstermektedir) özelliklerine sahiptir. Ayrıca bozonik ve fermiyonik büyüklükler çarpım halinde yerdeğiştirme özelliğine sahiptir($u\xi = \xi u$). Bozonik(B) ve Fermiyonik(F) büyüklüklerin çarpımlarında; FB çarpımı fermiyonik büyüklüğe diğer çarpımlar ise Bozonik büyüklüklere karşılık gelmektedir. (14) denkleminden Euler–Lagrange denklemleri elde edildikten sonra $\phi_x = u$ denklemlerde yerine konulursa ,

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x + 3\xi\xi_{xx} \tag{15a}$$

$$\xi_t = -4\xi_{xxx} + 6u\xi_x + 3u_x\xi \tag{15b}$$

denklemleri elde edilir. (15) denklem sistemine süper KdV denklemi adı verilmektedir. Süper KdV denklemi hem bi-Hamilton yapıya sahip hem de süper AKNS denklemlerinden elde edildiğinden tamamen çözülebilir bir sistemdir [5,6]. Süper modifiye edilmiş KdV (mKdV) denklemini elde etmek için

$$u = v^2 + v_x + \frac{1}{4}\theta\theta_x \tag{16a}$$

$$\xi = \theta_x + v\theta \tag{16b}$$

ile verilen süper Miura dönüşümleri kullanılır. Burada v bozonik ve θ fermiyonik $\left(\theta^2 = 0\right)$ büyüklüklere karşılık gelmektedir. Süper Miura dönüşümleri (15) denklemlerinde kullanılarak süper mKdV denklemleri

$$v_t = \partial_x \left(2v^3 - v_{xx} + \frac{3}{4}\theta\theta_{xx} + \frac{3}{2}v\theta\theta_x \right) \tag{17a}$$

$$\theta_t = -4\theta_{xxx} + \left(6vv_x - 3v_{xx}\right)\theta + 6\left(v^2 - v_x\right)\theta_x \tag{17b}$$

şeklinde elde edilir. (17) denklemlerinde fermiyonik limitin sıfıra gitmesi durumunda, mKdV denklemi elde edilir [3].

4. Super Hamilton Operatörleri ve Graded-Jacobi Özdeşliği

Bu bu bölümde süper Hamilton operatörlerinin özellikleri ele alınacaktır. ϕ_A bozonik ve fermiyonik büyüklükleri içeren alan,

$$\phi_A = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ \xi_a \end{pmatrix} \tag{18}$$

ile verilsin. Burada $u_\alpha(x,\, t)$ ve $\xi_a(x,t)$ sırası ile bozonik ve fermiyonik büyüklüklere karşılık gelmektedir. $\alpha = 1{,}2,\cdots n$ ve $a = 1{,}2,\cdots m$ şeklinde değişmektedir. Sürekli dinamik Hamilton sistemin zaman evrim denklemi

$$\partial_t \phi_A = \sum_B J_{AB} \frac{\delta H}{\delta \phi_B} = \sum_B J_{AB} E_B(H) \tag{19}$$

ile verilir. Burada E_B Euler operatörü,

$$E_B = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\partial_x\right)^k \frac{\partial}{\partial_x^k \phi_B} \tag{20}$$

J_{AB} diferansiyel operatör ve H uygun bir fonksiyoneldir. J_{AB} operatörü

$$\{F, G\} = \sum_{AB} \int \left[J_{AB} E_B(G)\right] E_A(F) dx \tag{21}$$

şeklinde bir Poisson parantezi tanımlar. Burada F ve G fonksiyonellerinin sırası graded sistemler için önem kazanmaktadır. Temel Poisson parantezi

$$\left\{\phi_A(x), \phi_B(x')\right\} = J_{AB}\,\delta(x - x') \tag{22}$$

ile verilir. (22) denklemi, (31) denklemini,

$$\partial_t \phi_A = \{\phi_A, H\} \tag{23}$$

şeklinde yazmamızı sağlar. J_{AB} 'nin Hamilton operatörü olabilmesi için aşağıda verilen iki özelliği aynı anda sağlamalıdır [14].

i) Skew-simetri(Eğik-simetrik)

$$\{F, G\} = -(-)^{\tilde{p}(F)\tilde{p}(G)}\{G, F\} \tag{24}$$

ii) Jacobi özdeşliği

$$\Pr v_{J\theta}(I) = 0 \tag{25}$$

Burada $\tilde{p}(F)$ F bozonik (fermiyonik) ise sıfır (bir) değerlerini almaktadır. (13) denkleminde I graded cosimplektik fonksiyonel bi-vektör(ikili vektör) olup,

$$I = \frac{1}{2}\sum_{A,B}\int J_{AB}\Theta_B \wedge \Theta_B dx \tag{26}$$

ile verilir. Burada $\Theta_A = \{\theta_\alpha, \eta_a\}$ bozonik ve fermiyonik uni-vektörler(tekli vektör), $\{u_\alpha, \xi_a\}$ 1-formlara dual olan baz oluştururlar. Ayrıca

$$\Theta_A \wedge \Theta_B = -(-1)^{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}\Theta_B \wedge \Theta_A \tag{27}$$

ve Θ fermiyonik ise $\Theta \wedge \Theta \neq 0$ olduğu gözönüne alınmalıdır [15,16]. Şimdi çok bileşenli super Hamilton operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz;

$$i)\ J_{AB}^{(1)} = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta}\partial_x & 0 \\ 0 & \delta_{ab} \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$ii)\ J_{AB}^{(2)} = \begin{pmatrix} J_{\alpha\beta} & J_{\alpha b} \\ J_{a\beta} & J_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\alpha\beta}\partial_x^3 + 2C_{\alpha\beta\gamma}u_\gamma\partial_x + C_{\alpha\beta\gamma}u_{\gamma,x} & K_{\alpha bd}\xi_d\partial_x + L_{\alpha bd}\xi_{d,x} \\ M_{a\beta d}\xi_d\partial_x + N_{a\beta d}\xi_{d,x} & \Lambda_{ab}\partial_x^2 + \Omega_{ab\gamma}u_\gamma \end{pmatrix} \tag{29}$$

Burada $u_{\alpha,x} = \partial_x u_\alpha$ ve $u(x,t)$ ve $\xi(x,t)$ dışında kalan bütün katsayılar sabitlerdir. $J_{AB}^{(1)}$ operatörü skew-simetrik ve Jacobi özdeşliğini kolayca sağladığı için Hamilton operatörüdür. Fakat $J_{AB}^{(2)}$ skew-simetrik operatörün Hamilton operatörü olduğunu söylemek $J_{AB}^{(1)}$ kadar kolay değildir. $J_{AB}^{(2)}$ nin Hamilton operatörü olduğunu göstermek için (25) denkleminde verilen Jacobi özdeşliğini sağlaması gerekmektedir. Böylece (25) denklemi $J_{AB}^{(2)}$ için,

$$\Pr \hat{v}_{J\Theta}(I) = \frac{1}{2}\int \Pr \hat{v}_{J\Theta}\left(J^{(2)}_{AB}\right)\Theta_A \wedge \Theta_B\, dx \tag{30}$$

şeklini alır. Burada Einstein toplama kuralı kullanılarak (30) denklemi daha açık olarak,

$$\Pr \hat{v}_{J\Theta}(I) = \frac{1}{2}\int \Big\{ \left[\Pr \hat{v}_{J\Theta}(J_{\alpha\beta})\theta_\beta\right] \wedge \theta_\alpha + \left[\Pr \hat{v}_{J\Theta}(J_{\alpha b})\eta_b\right] \wedge \theta_\alpha$$

$$+ \left[\Pr \hat{v}_{J\Theta}(J_{a\beta})\theta_\beta\right] \wedge \eta_a + \left[\Pr \hat{v}_{J\Theta}(J_{ab})\eta_b\right] \wedge \eta_a \Big\} dx = 0 \tag{31}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\Pr \hat{v}_{J\Theta}$,

$$\Pr \hat{v}_{J\Theta}\left(J^{(2)}_{AB}\right) = \sum_{k,E,F} \partial_x^k\left(J^{(2)}_{EF}\Theta_F\right)\frac{\partial}{\partial\left(\partial_x^k \phi_E\right)}\left(J^{(2)}_{AB}\right) \tag{32}$$

ile verilir. (32) denklemi daha açık olarak,

$$\Pr \hat{v}_{J\Theta}\left(J^{(2)}_{AB}\right) = \sum_{k} \Big\{ \partial_x^k\left(J_{\lambda\rho}\theta_\rho\right)\frac{\partial}{\partial\left(\partial_x^k u_\lambda\right)}\left(J^{(2)}_{AB}\right) + \partial_x^k\left(J_{\lambda e}\eta_e\right)\frac{\partial}{\partial\left(\partial_x^k u_\lambda\right)}\left(J^{(2)}_{AB}\right)$$

$$+ \partial_x^k\left(J_{d\rho}\theta_\rho\right)\frac{\partial}{\partial\left(\partial_x^k \xi_d\right)}\left(J^{(2)}_{AB}\right) + \partial_x^k\left(J_{de}\eta_e\right)\frac{\partial}{\partial\left(\partial_x^k \xi_d\right)}\left(J^{(2)}_{AB}\right)\Big\} \tag{33}$$

şeklinde yazılabilir. $k = 0,1$ değerlerini almaktadır. Son olarak,

$$C_{\alpha\beta\gamma} = C_{\beta\alpha\gamma}$$

$$\Omega_{ab\lambda} = \Omega_{ba\lambda}$$

$$\Omega_{ab\lambda}K_{\lambda cd} = \Omega_{ac\lambda}K_{\lambda bd}$$

denklemleri tanımlanır ve (33) denklemini (31) denkleminde kullanarak,

$$\Pr \hat{v}_{J\omega}(\Theta) = \frac{1}{2}\int \Big\{ C_{\alpha\beta\lambda}b_{\lambda\rho}\left(\theta_{\rho,xxx} \wedge \theta_\beta \wedge \theta_\alpha - 2\theta_{\rho,xx} \wedge \theta_{\beta,x} \wedge \theta_{\alpha,x}\right)$$

$$+ C_{\alpha\beta\lambda}C_{\lambda\rho\gamma}\left(u_\gamma\theta_{\rho,x} \wedge \theta_\beta \wedge \theta_\alpha + 2u_{\gamma,x}\theta_\rho \wedge \theta_{\beta,x} \wedge \theta_\alpha\right)$$

$$+ C_{\alpha\beta\lambda}C_{\lambda\rho\gamma}\left(4u_\gamma\theta_{\rho,x} \wedge \theta_{\beta,x} \wedge \theta_\alpha + 2u_{\gamma,x}\theta_\rho \wedge \theta_\beta \wedge \theta_\alpha\right)$$

$$+ M_{c\beta b}\left(L_{\alpha ac} + M_{\alpha ac} - N_{\alpha ac}\right)\xi_b\eta_a \wedge \theta_{\beta,x} \wedge \theta_{\alpha,x}$$

$$
\begin{aligned}
&-N_{c\beta b}\left(K_{\alpha ac}-L_{\alpha ac}+N_{a\alpha c}\right)\xi_{b,x}\eta_{a,x}\wedge\theta_{\beta,x}\wedge\theta_{\alpha,x}\\
&+\left[2C_{\alpha\beta\lambda}K_{\lambda rd}-M_{c\beta d}\left(K_{\alpha rc}-L_{\alpha rc}+N_{r\alpha c}\right)\right]\xi_{d}\eta_{x}^{r}\wedge\theta_{x}^{\beta}\wedge\theta^{\alpha}\\
&+\left[2C_{\alpha\beta\lambda}L_{\lambda rd}-N_{c\alpha d}\left(M_{r\beta c}-N_{r\beta c}+L_{\beta rc}\right)\right]\xi_{d,x}\eta^{r}\wedge\theta_{x}^{\beta}\wedge\theta^{\alpha}\\
&+\left[\Lambda_{cr}\left(K_{\alpha bc}+M_{b\alpha c}\right)-6\Omega_{br\lambda}b_{\lambda\alpha}\right]\eta_{xx}^{r}\wedge\eta_{x}^{b}\wedge\theta^{\alpha}\\
&+\left[\Lambda_{cr}\left(M_{b\alpha c}-N_{b\alpha c}+L_{\alpha bc}\right)-2\Omega_{rb\lambda}b_{\lambda\alpha}\right]\eta_{xxx}^{r}\wedge\eta^{b}\wedge\theta^{\alpha}\\
&-\left[2\Omega_{rb\lambda}C_{\lambda\rho\gamma}-\frac{1}{2}\Omega_{cr\gamma}\left(2M_{b\alpha c}-N_{b\alpha c}+K_{\alpha bc}+L_{\alpha bc}\right)\right]u_{\gamma}\eta^{r}\wedge\eta^{b}\wedge\theta_{x}^{\alpha}\\
&-\left[\Omega_{rb\lambda}C_{\lambda\alpha\gamma}-\frac{1}{2}\Omega_{cr\gamma}\left(N_{b\alpha c}+K_{\alpha bc}-L_{\alpha bc}\right)\right]u_{\gamma,x}\eta^{r}\wedge\eta^{b}\wedge\theta^{\alpha}\\
&\left.+\frac{1}{3}\Omega_{ab\lambda}\left[3L_{\lambda rd}-K_{\lambda rd}\right]\xi_{d,x}\eta^{r}\wedge\eta^{b}\wedge\eta^{a}\right\}dx=0
\end{aligned}
\tag{34}
$$

denklemi elde edilir. Kolayca görüleceği gibi (34) denkleminin basit çözümü tüm katsayıların sıfır olmasıdır. Basit olamayan çözüm ise,

$$
\begin{aligned}
&b_{\alpha\lambda}C_{\lambda\beta\gamma}=b_{\beta\lambda}C_{\lambda\alpha\gamma} && K_{\alpha ad}=M_{a\alpha d}\\
&C_{\alpha\beta\lambda}C_{\lambda\gamma\rho}=C_{\alpha\gamma\lambda}C_{\lambda\beta\rho} && \Lambda_{bc}M_{a\alpha c}=3\mathrm{b}_{\alpha\beta}\Omega_{ab\beta}\\
&K_{\alpha ad}=3L_{\alpha ad} && M_{c\alpha b}K_{\beta ac}=M_{c\beta b}K_{\alpha ac}\\
&2M_{a\alpha d}=3N_{a\alpha d} && C_{\alpha\beta\lambda}L_{\lambda ab}=K_{\alpha ac}K_{\beta bc}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

şeklinde elde edilir [17]. Böylece (35) denkleminin çözümleri gözönüne alınarak $J_{AB}^{(2)}$ Jacobi özdeşliğini sağladığından bir Hamilton operatördür ve ikinci Poisson yapıyı tanımlamaktadır. KdV denklemi için Hamilton operatörlerinin toplamı da Jacobi özdeşliğini sağladığından bi-Hamilton sistem oluşturmaktadır. Çok bileşenli super KdV denkleminde $\left(J_{AB}^{(1)}+J_{AB}^{(2)}\right)$ operatörü de graded Jacobi özdeşliği,

$$
\Omega_{ab\beta}-M_{a\beta b}-\frac{1}{2}\left(K_{\beta ab}+L_{\beta ab}-N_{a\beta b}\right)=0 \tag{36}
$$

koşulu altında sağlanmaktadır. (35) denklemlerindeki çözümler kullanılarak (36) denklemi

$$\Omega_{ab\beta}+N_{a\beta b}=2K_{\beta ab} \tag{37}$$

ve son olarak

$$\Omega_{ab\beta}=4L_{\beta ab} \tag{38}$$

şeklini alır. Böylece $J_{AB}^{(1)}$ ve $J_{AB}^{(2)}$ Hamilton operatörleri süper Hamilton çift oluşturmaktadır.

5. Çok Bileşenli Süper KdV sistemleri

Bir önceki bölümde çok bilesenli KdV denkeminin bi-Hamilton sistem olduğu gösterilmişti. Bi-Hamilton özelliği beraberinde sonsuz tane korunan büyüklük getirir. Örneğin $\{H_k\}$ sonsuz tane korunan büyüklükleri göstermek üzere,

$$\sum_B J_{AB}^{(2)}E_B(H_{k-1})=\sum_B J_{AB}^{(1)}E_B(H_k) \tag{39}$$

şeklinde tanımlanan tekrarlama bağıntısını sağlamalıdır. Burada $k=1,2,3,\cdots$ değerlerini alır. İlk iki korunan büyüklükler,

$$H_0=\frac{1}{2}\int\left[-\delta_{\rho\sigma}u_\rho u_\sigma+\delta_{ab}\xi_a\xi_{b,x}\right]dx \tag{40}$$

$$H_1=\frac{1}{2}\int\left[-b_{\alpha\beta}u_{\alpha,x}u_{\beta,x}+C_{\alpha\beta\gamma}u_\alpha u_\beta u_\gamma-\Lambda_{ab}\xi_{a,x}\xi_{b,xx}+2K_{\alpha bc}u_\alpha\xi_b\xi_{c,x}\right]dx \tag{41}$$

şeklinde tanımlanırsa üçüncü korunan büyüklük (39) denkleminden

$$\begin{aligned}H_2=\frac{1}{2}\int\Big[&b_{\alpha\beta}b_{\beta\gamma}u_{\alpha,xx}u_{\gamma,xx}-5b_{\alpha\beta}C_{\alpha\rho\gamma}u_\alpha u_{\rho,x}u_{\gamma,x}+\frac{5}{4}C_{\alpha\beta\gamma}C_{\beta\rho\sigma}u_\alpha u_\gamma u_\rho u_\sigma-\Lambda_{ab}\Lambda_{bc}\xi_{a,x}\xi_{c,xxx}\\&+10L_{\alpha ab}K_{\beta bc}u_\alpha u_\beta\xi_a\xi_{c,x}-\Lambda_{ab}L_{\alpha bc}\left(\frac{5}{2}u_\alpha\xi_{a,x}\xi_{c,xx}-\frac{30}{4}u_\alpha\xi_a\xi_{c,xxx}\right)\Big]dx\end{aligned} \tag{42}$$

elde edilir. Böylece (39) denklemini kullanarak çözülebilir çok bileşenli süper değişim denklem sistemini,

$$\partial_t\phi_A=\sum_B J_{AB}^{(1)}\frac{\delta H_1}{\delta\phi_B}=\sum_B J_{AB}^{(2)}\frac{\delta H_0}{\delta\phi_B}=\sum_B J_{AB}^{(1)}\frac{\delta H_2}{\delta\phi_B} \tag{43}$$

denklemleri ile elde edilebilir. (35) ve (37) denklemindeki bağ koşulları kullanılarak yeni çözülebilir çok bileşenli super KdV denklemleri elde edilebilir. ilk değişim denklemleri,

$$u_{\alpha,t}=b_{\alpha\beta}u_{\beta,xxx}+3C_{\alpha\beta\gamma}u_{\beta,x}u_\gamma+K_{\alpha ab}\xi_a\xi_{b,xx} \tag{44a}$$

$$\xi_{a,t} = \Lambda_{ab}\xi_{b,xxx} + K_{\alpha ab}\left(2u_{\alpha}\xi_{b,x} + u_{\alpha,x}\xi_{b}\right) \tag{44b}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemler çok bileşenli super KdV denklemleridir. (44) denkleminin (1+1) boyuttaki tek bileşenli limitte $b_{11} = -1$, $\Lambda_{11} = -4$, $C_{111} = 2$ ve $K_{111} = 3$ seçilerek (15) denkleminde verilen süper KdV denklemi elde edilir. Çok bileşenli KdV hiyerarşisindeki ikinci denklem ailesi (42) denkleminde verilen korunan büyüklülük (43) denkleminde kullanılarak

$$u_{\sigma,t} = b_{\sigma\beta}b_{\beta\gamma}u_{\gamma,xxxxx} + 5b_{\alpha\beta}C_{\beta\sigma\gamma}u_{\alpha}u_{\gamma,xxx} + 10b_{\alpha\beta}C_{\beta\sigma\gamma}u_{\alpha,x}u_{\gamma,xx} + \frac{15}{2}C_{\sigma\beta\gamma}C_{\beta\alpha\rho}u_{\alpha,x}u_{\gamma}u_{\rho}$$

$$+10L_{\sigma ab}K_{\beta bc}\left(u_{\beta,x}\xi_{a}\xi_{c,x} + u_{\beta}\xi_{a}\xi_{c,xx}\right) + \frac{5}{2}\Lambda_{ab}L_{\sigma bc}\left(\xi_{a}\xi_{c,xxxx} + \xi_{a,x}\xi_{c,xxx}\right) \tag{45a}$$

$$\xi_{n,t} = \Lambda_{nb}\Lambda_{bc}\xi_{c,xxxxx} + 5\Lambda_{nb}L_{\alpha bc}\left(2u_{\alpha}\xi_{c,xxx} + 3u_{\alpha,x}\xi_{c,xx}\right)$$

$$+\frac{5}{2}\Lambda_{ab}L_{\alpha bn}\left(5u_{\alpha,xx}\xi_{c,x} + \frac{3}{2}u_{\alpha,xxx}\xi_{a}\right) + 10L_{\alpha ab}K_{\beta bn}\left(u_{\alpha,x}u_{\beta}\xi_{a} + u_{\alpha}u_{\beta}\xi_{a,x}\right) \tag{45b}$$

elde edilir [18]. Bu şekilde bütün çok bileşenli süper KdV denkleminin hiyerarşisini elde etmek mümkündür.

6. Çok Bileşenli Süper mKdV Denklemi

Çok bileşenli süper mKdV denkleminin çözümlerini çok bileşenli süper KdV denklemine taşıyan genelleştirilmiş Miura dönüşümünü,

$$u_{\alpha} = \frac{1}{2}C_{\alpha\lambda\rho}v_{\lambda}v_{\rho} + v_{\alpha,x} + K_{\alpha ab}\theta_{a}\theta_{b,x} \tag{46a}$$

$$\xi_{b} = \theta_{b,x} + \frac{1}{3}M_{b\sigma c}v_{\sigma}\theta_{c} \tag{46b}$$

şeklinde yazalım. Burada *v* bozonik ve θ fermiyonik büyüklükleri tanımlamaktadır. Çok bileşenli süper mKdV denklemi çok bileşenli süper KdV denkleminden, çok bileşenli süper Miura döşümü kullanılarak elde edilir. Çok bileşenli süper mKdV denkleminin herhangi bir çözümü, Miura dönüşümü yardımı ile çok bileşenli süper KdV denkleminin çözümlerini verir. (46) denklemleri (44) denkleminde yerine konularak ve $b_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$, $\Lambda_{ab} = -4\delta_{ab}$ alınarak,

$$\frac{\partial}{\partial x}\theta_{a,t}+\frac{1}{3}M_{a\sigma c}\left(v_{\sigma}\theta_{a,t}+\theta_{c}v_{\sigma,t}\right)=-4\theta_{a,xxx}-\frac{4}{3}M_{a\sigma c}\left(v_{\sigma,xxx}\theta_{c}+3v_{\sigma,xx}\theta_{c,x}+3v_{\sigma,x}\theta_{c,xx}+v_{\sigma}\theta_{c,xxx}\right)$$

$$+M_{a\alpha b}\left[\left(C_{\alpha\lambda\rho}v_{\lambda}v_{\rho}+2v_{\alpha,x}+\frac{1}{6}K_{\alpha mn}\theta_{m}\theta_{n,x}\right)\left(\theta_{b,xx}+\frac{1}{3}M_{b\sigma c}\left(v_{\sigma,x}\theta_{c}+v_{\sigma}\theta_{c,x}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\left(C_{\alpha\lambda\rho}v_{\lambda,x}v_{\rho}+v_{\alpha,xx}+\frac{1}{12}K_{\alpha mn}\theta_{m}\theta_{n,xx}\right)\left(\theta_{b,x}+\frac{1}{3}M_{b\sigma c}v_{\sigma}\theta_{c}\right)\right] \quad (47)$$

elde edilir. (47) denkleminde gerekli işlemler yapılarak ve (35) denkleminde verilen bağ koşulları kullanılarak çok bileşenli süper mKdV denklemi,

$$v_{\beta,t}=-v_{\beta,xxx}+\frac{3}{2}C_{\beta\alpha\sigma}C_{\alpha\lambda\rho}v_{\lambda}v_{\rho}v_{\sigma,x}+\frac{1}{8}K_{\alpha mn}C_{\beta\sigma\alpha}\left(2v_{\sigma,x}\theta_{m}\theta_{n,x}+v_{\sigma}\theta_{m}\theta_{n,xx}\right)+\frac{1}{4}K_{\beta mn}\theta_{n,x}\theta_{m,xx} \quad (48a)$$

$$\theta_{a,t}=-4\theta_{a,xxx}-K_{a\sigma c}\left(v_{\sigma,xx}\theta_{c}+2v_{\sigma,x}\theta_{c,x}\right)+K_{a\alpha b}C_{\alpha\lambda\rho}\left(v_{\lambda}v_{\rho}\theta_{b,x}+v_{\lambda,x}v_{\rho}\theta_{b}\right) \quad (48b)$$

şeklinde elde edilir. (1+1) boyutta tek bileşenli limitte $C_{111}=2$ ve $K_{111}=3$ değişkenler $v_1=v$ ve $\theta_1=\theta$ alınarak (17) denklemleri ile verilen süper mKdV denklemi elde edilir.

7. SONUÇ

Bu çalışmada yeni bir çözülebilir sistem olan çok bileşenli süper KdV denklemi elde edilmiştir. Sistemin çözülebilirliği bi-Hamilton yapısı elde edilerek gösterilmiştir. Poisson yapıyı tanımlayan süper Hamilton operatörlerin graded-Jacobi özdeşliğini (35) denkleminde verilen koşullar altında sağladıkları gösterilmiştir. Bu koşullar değişim denklemleri ile ilgili yapıyı tanımlaması açısından önem kazanmaktadır. Son olarak genelleştirilmiş çok bileşenli süper Miura dönüşümü verilerek çok bileşenli süper mKdV denklemi elde edilmiştir. Süper mKdV denklemleri de (35) denklemlerinde verilen koşulları içermektedir. Elde edilen çok bileşenli süper KdV ve süper mKdV denklemlerinin (1+1) boyuttaki tek bileşen limitleri de iyi bilinen süper denklemlere indirgendiği gösterilmiştir. Bu çalışmada sistemin çözülebilirliği sadece bi-Hamilton yapı incelenerek gösterilmiştir. Diğer çözülebilirlik kriterlerinin çok bileşenli süper KdV denklemi için araştırılması ayrı bir araştırma konusudur.

TEŞEKKÜR

Bütün çalışmalarım boyunca bana sürekli destek olan ve yapıcı eleştirilerde bulunan çok değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Oya Oğuz ve Prof. Dr. Ömer Oğuz'a teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışma YTÜ Araştırma Fonu 21-01-01-02 nolu proje çerçevesinde desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Das A., Integrable Models, World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol.30, Nevyork, 1989.

[2] Ablowitz M. J. ve Clarkson P. A., “Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[3] Yazıcı D., “Çokbileşenli Çözülebilir Sistemlerin Hamilton Yapıları”, Doktora Tezi, Fizik Bölümü, Y.T.Ü., 2001.

[4] Korteweg D. J., ve G. de Vries, “On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and On a New Type of Stationary Waves “, Philos. Mag. Ser. 5, 39: 422-443, 1895

[5] Gürses M. ve Oğuz Ö., “ A Super AKNS Scheme”, Physics Letters, 108A(9): 437-440, 1985.

[6] Mathieu P., “ Super Symmetric Extention of the Korteweg-de Vries Equation”, J. Math.Phys., 29(11): 2499-2056, 1988.

[7] Kupershmidt B. A., “A Super Korteveg-de Vries Equation: An Integrable System”, Physics Letters, 102A(5, 6): 213-215, 1984.

[8] Kupershmidt B. A.,”Elements of Super Integrable Systems”, D. Reidel, Dortrecht, 1987.

[9] Manin Yu I. ve Radul A. O., “A Super Symmetric Extention of the Kodomtsev-Petviashvili Hierarchy”, Comm. Math. Phys. 98: 65-67, 1985.

[10] Svinolupov S. I., “Jordan algebra and Generalization KdV Equations”, Theoretical Mathematics, Plenum Publishing Corporation, 87: 611-620, 1991.

[11] Oğuz Ö., “Hamiltonian Stracture of Multicomponent KdV Equations”, Symmetries in Science VII, B.Gruber, Plenum Press, Nevyork, 1995.

[12] Biao Hu X., “An Approach to Generate Superextentions of Integrable Systems”, J. Phys. A: Math. Gen. 30: 619-632, 1997.

[13] Mathieu P., “ Super Symmetric Extention of the Korteweg-de Vries Equation”, J. Math.Phys., 29(11): 2499-2056, 1988.

[14] Olver P. J., Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, Nevyork, 1986.

[15] Mathieu P. “Hamiltonian Structure of Graded and Super Evolution Equations”, Letters in Mathematical Physics, 16: 199-206, 1988.

[16] Kupershmidt B. A, , “Odd and even Possion Brackets in Dynamical Systems”, Letters in Mathematical Physcis, 9: 323-330, 1985

[17] Yazıcı D., Oğuz O. ve Oğuz Ö. “Multicomonent bi-superHamiltonian KdV systems” Journal of Physics A Math., and Gen., 34, 7713-7718, 2001.

[18] Yazıcı D., Oğuz O. ve Oğuz Ö.” Hamiltonian structure of Multicomponent integrable systems”, Czechoslovak Journal of Physics Vol 51, No:12, 1459-1463, 2001.