YTÜD 2001/4

ARAŞTIRMA MAKALESİ

MÜHENDİSLİKTE REGRESYON ÇÖZÜMLEMESİ - PRATİK BİR YAKLAŞIM

Sema Noyan ALACALI

Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yıldız-İstanbul.

Geliş Tarihi: 03.10.1996

REGRESSION ANALYSIS IN ENGINEERING - A PRACTICAL APPROACH

SUMMARY

In engineering sometimes the necessary relationship between two variables cannot be derived on the basis of theoretical considerations, in these cases the required relationship may be determined emprically on the basis of experimental observations. For this purpose, at present, regression analysis techniques are being used widely in all branches of engineering for obtaining the underlying relationships among the random variables. In this paper a practical approach has been presented for the evaluation of above mentioned relationships and a computer program has been developed.

ÖZET

Mühendislikte iki değişken arasındaki gereksenen ilişkiler kimi zaman kuramsal temellere göre türetilemez. Bu gibi olgularda gereksenen ilişki deneysel gözlemlere dayanılarak olgusal şekilde belirlenebilir. Bu amaçla günümüzde, rasgele değişkenler arasındaki temel ilişkilerin elde edilmesinde regresyon çözümleme teknikleri geniş ölçüde kullanılmaktadır. Bu makalede sözkonusu ilişkilerin değerlendirilmesiyle ilgili pratik bir yaklaşım sunulmuş ve bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

1. GİRİŞ

Bir rasgele değişkenin ortalama değerinin ve varyansının öteki değişken değerlerinin bir fonksiyonu olarak elde edilmesini sağlayan sürece **regresyon çözümlemesi** denir. Çözümleme en küçük kareler ölçütüne göre geliştirilebilir. Regresyon, doğrusal olabilir ya da olmayabilir; iki değişkenli ya da çok değişkenli olabilir (1-11). Makalede, yalnızca iki değişkenli doğrusal regresyon irdelenecektir. Çözümleme için gerekli bağıntılar kaynak gösterilerek verilecektir. Bu bağıntıların kapsamlı türetilişleri belli başlı istatistik kitaplarında verilmiştir (1-11). Bu bağlamda, değişkenler arasındaki istatistiksel ilişki derecesinin belirlenmesi işlemine **korelasyon çözümlemesi** adı verilir. Bu çözümleme makalenin kapsamına alınmamıştır.

2. DOĞRUSAL REGRESYON

Bir sanayi işletmesinde bir kimyasal maddenin özgül ısısının sıcaklıkla değişiminin araştırılması olgusunu ele alalım ve çeşitli sıcaklık dereceleri için özgül ısıların belirlenmesiyle ilgilenelim. Herhangi bir sıcaklık derecesi için genelde farklı özgül ısılar bulunur. Bu, özgül ısının rasgele değişken olduğunu belirtir. Deney sürecinde araştırmacı tarafından seçilen ve duyarlılıkla kontrol edilebilen sıcaklık derecesi deterministik -istatistiksel yönden dağılımsal özelliği olmayan değişken kabul edilebilir. Kısaca, denetlenebilen sıcaklık **bağımsız değişken**, rasgele değişken özgül ısı ise **bağımlı değişken** olur (1,2,4,5,7-9,11).

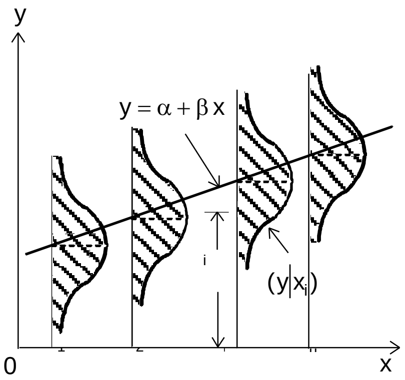
İki değişkenli bir olguda, değişkenlerden biri bağımsız değişken (X ya da x simgesiyle gösterilebilir), öteki bağımlı değişken (Y) ise bunların değerleri arasında "bir-tek" ilişki oluşmaz. Bağımsız değişkenin herhangi bir değeri için bağımlı değişkenin bir "olabilir değerler aralığı" bulunur. X bağımsız ve Y bağımlı değişkenlerine ilişkin $(x_i, y_i$, i = 1, 2,...n) ikili verilerin iki-boyutlu bir eksen takımı üzerinde işaretlenmesiyle elde edilen grafiğe **serpilme diyagramı** ya da **dağılma diyagramı** denir. Diyagramdaki veri noktaları doğrusal yörünge izliyorsa Y nin X e göre **doğrusal regresyonu** sözkonusudur. Y nin ortalamasının ve varyansının X in fonksiyonu olarak belirlenmesini sağlayan işleme **regresyon çözümlemesi** ve doğrusal ortalama değer fonksiyonuyla sınırlandırılmış işleme de **doğrusal regresyon** adı verilir (1-11).

2.1 Sabit varyanslı doğrusal regresyon

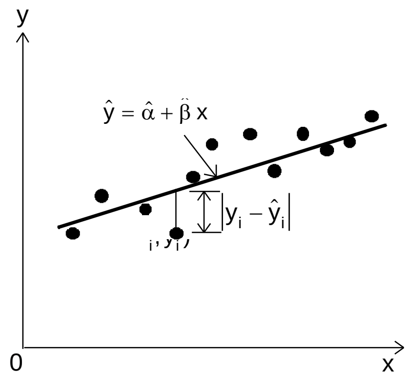
$X = x$ sabit değeri için Y rasgele değişkenini $Y|x$ ve Y'nin koşullu yoğunluk dağılımını $f(y|x)$ ile gösterelim. Örnekse, $X = x_i$ için $Y|x_i$, Y_i rasgele değişkenini belirtir (Şekil 1). Bu bağlamda doğrusal regresyon terimi, x ile $Y|x$ nin ortalaması arasındaki ilişkinin doğrusal olduğunu ve aşağıdaki bağıntıyla gösterilebileceğini belirtir (1,2,4,9,11).

$$E(Y|X = x) \equiv m_{Y|x} = \alpha + \beta x \qquad (1)$$

E ve m, beklenen değeri ve ortalamayı, özdeş değerleri belirtir. Bağıntının temsil ettiği doğru çizgi, Y' nin x' e göre regresyonunu ifade eder ve $y = \alpha + \beta x$ şeklinde yazılabilir (Şekil 1). α ve β parametrelerinin değerleri örnek verileriyle tahmin edilir ve bu tahminler $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ ile gösterilebilir. Regresyon doğrusunun tahmini de $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ olur (Şekil 2).



Şekil 1. Regresyon doğrusu Y dağılımları ortalamasının konumu.



Şekil 2. Bir örnekten sağlanan verilere göre en küçük kareler regresyon doğrusu.

Örnek verilerinin serpilme diyagramındaki konumlarına göre çeşitli $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ tahminleri yapılabilir. Bu yüzden Y nin ortalama değer fonksiyonuna ilişkin çok sayıda doğru çizgi tahmin edilebilir. Öyleyse sorun, verilere en yakın biçimde uyum sağlayan doğru çizginin, dolayısıyla $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ nın tahmin edilmesidir. Bu tahmini değerler **kalıcı hataların** (sapmaların, residual errors) karelerinin toplamı minimumlaştırılarak elde edilebilir. Sözkonusu yaklaşıma **en küçük kareler yöntemi** denildiği bilinmektedir. Anılan toplam (Şekil 2);

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)^2 \tag{2}$$

$\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ tahminleri (2) bağıntısının $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$'ya göre alınan kısmi türevlerinin sıfıra eşitlenmesiyle bulunan denklemlerin ardışık çözülmesiyle elde edilebilir:

$$\hat{\alpha} = (1/n)\Sigma y_i - (\hat{\beta}/n)\Sigma x_i = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} \tag{3}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} \tag{4}$$

$\Sigma = \sum_{i=1}^{n}$. n, örnek büyüklüğü. $\bar{x}, \bar{y}$, örnek ortalamaları.

En küçük kareler regresyon doğrusu, $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ nın (3) ve (4) bağıntılarından elde edilen en küçük kareler tahminleriyle belirlenir:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x \tag{5}$$

Bağıntıdaki $\hat{\alpha}$, regresyon doğrusunun orijindeki ordinatını ve $\hat{\beta}$ da doğrunun eğimini belirtir. Bağıntı, yalnızca örnek noktalarının bulunduğu aralık için geçerlidir; ekstrapolasyon hatalı sonuç verebilir.

En küçük kareler regresyon doğrusunun koşullu varyansı $(\mathrm{Var}(Y|x) = \sigma^2_{Y|x})$ ilgilenilen dağılmanın ölçüsü kabul edilebilir (1,2,4,5,6-9,11). $\mathrm{Var}(Y|x)$ in ilgili x aralığında sabit kabul edilmesi durumunda eğilimsiz tahmini aşağıdaki bağıntıyla belirlenebilir (1,2,4,5,6-9,11):

$$s^2_{Y|x} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n-2}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 - \hat{\beta}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right] = \Delta^2 / n-2 \tag{6}$$

$s^2_{Y|x}$, örneğin koşullu varyansı. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$, örnek verileriyle tahmin edilen değerler olduğu için iki serbestlik derecesi yitirilmiştir. Bağıntıdaki $(n-2)$ bu olguyu belirtir. **Koşullu standart sapma**, $\sigma_{Y|x}$, (6) bağıntısıyla hesaplanır.

$\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$, büyüklükleri n olan örneklerden sağlanabilecekleri, dolayısıyla farklı değerler alabilecekleri için rasgele değişkenlerdir. Bu nedenle ortalamaları ve varyansları ile tanımlanırlar (1,4,8,9,11).

2.2 Güven aralıkları

$\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$, α ve β parametrelerinin nokta tahminleridir. "Tahmin Kuramı" nda bu tekil değerlerin duyarlılık dereceleri, bilinmeyen ilgili toplum parametrelerini içermesi beklenen ve onların nokta tahminleriyle merkezlendirilmiş **güven aralıkları** ile belirtilebilir (1,2,4,7-9,11). Bu bağlamda, örnek verilerine dayanılarak α, β ve $\alpha+\beta x$ için güven aralıkları belirlenebilir. Belirlemede x_i sabit değerleri için y_i değerleri dağılımlarının, $\alpha+\beta x$ regresyon doğrusuna göre, normal, $N(m,\sigma)$, olduğu kabul edilebilir. Dolayısıyla $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ ve $\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ tahminleri de normal dağılımlı olur. Bununla birlikte daha güvenilir bir yaklaşım olması nedeniyle α, β ve $\alpha+\beta x$ için güven aralıklarının t-dağılımı'na göre tahmin edilmesi yeğlenmektedir (1,4,7,9,11).

t-dağılımına göre, x'in x_k gibi bir değeri için Y'nin $\alpha+\beta x$ ortalamasına ilişkin güven aralığı (Şekil 3) aşağıdaki bağıntıyla tahmin edilebilir (1,4,8,9,11):

$$(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_k) \pm t_{\alpha/2,\,n-2}\, s_{Y|x} \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_k-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \right]^{1/2} \tag{7}$$

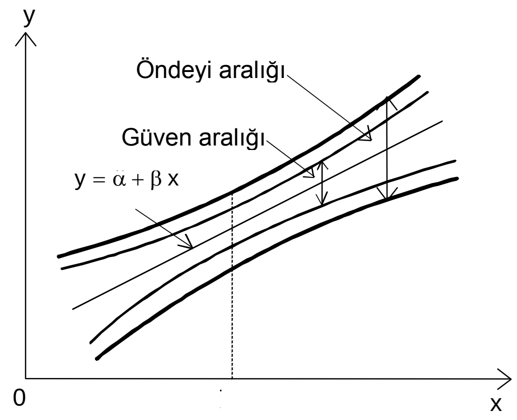
$t_{\alpha/2,n-2}$; t-dağılımı rasgele değişkeninin, T, $(1-\alpha/2)$ birikimli olasılığı karşılığı değeri. α, t-dağılımına ilişkin alanları belirten simge, $n-2$, serbestlik derecesi, $t_{\alpha/2,f}$ (f; serbestlik derecesi) değerleri belli başlı istatistik kitaplarındaki tablolarda verilmiştir (1,2,4,9,11).

2.3 Öndeyi aralıkları

Mühendisler ve bilimsel araştırma yapanlar için çoğu kez, bağımlı değişkenin gelecekte gözlenecek değerini içermesi beklenen aralığın tahmin edilmesi de önemli olabilir. Bu aralık **öndeyi aralığı** (prediction interval) terimiyle adlandırılmaktadır (8,9,11). Örnekse, bir sanayi işletmesinde gerçekleştirilen bir kimyasal süreçte, kontrol edilebilen giriş sıcaklığı ile çıkıştaki katran içeriğinin, belirli bir sıcaklık derecesi için gelecekteki gerçek miktarının bulunması olası aralık öndeyi aralığı olur. Bu bağlamda x' in x_k gibi bir değeri için Y' nin $(1-\alpha)$düzeyindeki öndeyi aralığı şu bağıntıyla tahmin edilebilir (4,8,9,11):

$$(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_k) \pm t_{\alpha/2,\,n-2}\, s_{Y|x} \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_k-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \right]^{1/2} \tag{8}$$

En dar güven ve öndeyi aralıkları $x=\bar{x}$ için oluşur.



Şekil 3. Güven ve öndeyi aralıkları.

3. UYGULAMA

Doğrusal regresyona örnek olarak aşağıdaki tablodaki deneysel verileri gözönüne alalım (x = bağımsız değişken, y = bağımlı değişken). Verilerin serpilme diyagramındaki konumu doğrusallık kabülünün geçerli olduğunu göstermektedir (Şekil 4). Bu kabule göre en küçük kareler regresyon doğrusunu ve $x = 4$ için Y nin % 95'lik güven ve öndeyi aralıklarını tahmin edelim.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1.5	1.8	2.4	3.0	3.5	3.9	4.4	4.8	5.0
y_i	4.8	5.7	7.0	8.3	10.9	12.4	13.1	13.6	15.3

$$\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 345.09, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 115.11, \quad \bar{x} = 3.366667, \quad \bar{y} = 10.122222$$

$$\hat{\beta} = \left[\frac{345.09 - 9\,(3.3366667)(10.122222)}{115.11 - 9(3.366667)^2} \right] = 2.930281$$

$$\hat{\alpha} = 10.122222 - 2.9302813\,(3.366667) = 0.256942.$$

Şu halde Y'nin x'e göre tahmini regresyon çizgisi;

$$\hat{y} = 0.256942 + 2.930281x$$

$x = 4$ için tahmini değer;

$$\hat{y} = 0.256942 + (2.930281)(4) = 11.97807$$

Güven aralığı: Önce regresyon çizgisinin varyansını belirleyelim.

$$\hat{y}_i = 0.256942 + 2.930281 x_i$$

i	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$10^6 (y_i - \hat{y}_i)^2$
1	1.5	4.8	4.652364	0.147636	21796.3885
2	1.8	5.7	5.531448	0.168552	28409.7767
3	2.4	7.0	7.289616	− 0.289616	83877.42746
4	3.0	8.3	9.047785	− 0.747785	559182.4062
5	3.5	10.9	10.512926	0.387074	149826.2815
6	3.9	12.4	11.685038	0.714962	511170.6614
7	4.4	13.1	13.150178	− 0.050178	2517.831684
8	4.8	13.6	14.322291	− 0.722291	521704.2887
9	5.0	15.3	14.908347	0.391653	153392.0724

$$10^6 \Delta^2 = 2031876$$
$$\Delta^2 = 2.031876$$

$$s_{Y|x}^2 = 2.031876/7 = 0.290268, \quad s_{Y|x} = 0.538765$$

$x = 4$ için % 95'lik güven aralığı, (7) bağıntısıyla belirlenir.

$1 - \alpha = 0.95$, $\alpha/2 = 0.025$. $p = 1 - \alpha/2 = 1 - 0.025 = 0.975$ ve $f = n - 2 = 9 - 2 = 7$ için Tablo EC5'ten(*) $t_{0.025,\,7} = 2.365$ (11).

$$0.256942 + 2.930281(4) \pm (2.365)(0.538765)\left[(1/9) + (4 - 3.366667)^2 / 13.1\right]^{1/2}$$

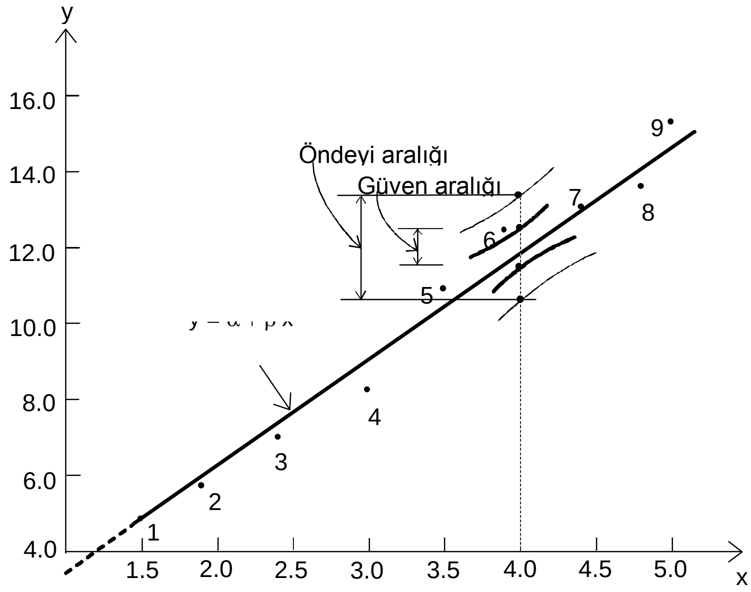
$$11.978066 \pm 0.479691 = (11.498375;\ 12.457757)$$

Öndeyi aralığı: $x = 4$ için % 95'lik ön-deyi aralığı (8) bağıntısıyla belirlenir:

$$(0.256942 + 2.930281(4) \pm (2.365)(0.538765)\left[1 + (1/9) + (4 - 3.366667)^2 / 13.1\right]^{1/2}$$

$$11.978066 \pm 1.361483 = (10.616583;\ 13.339549)$$

(*) t-dağılımı, T rasgele değişkeninin $(1-\alpha/2)$ birikimli olasılığı karşılığı değeri $t_{\alpha/2,f}$ ile gösterilirse, farklı serbestlik dereceleri ve çeşitli $p = (1-\alpha/2)$ olasılık düzeylerine ilişkin $t_{\alpha/2,f}$ değerleri gösterilmiştir.



Şekil 4. Uygulamaya ilişkin serpilme diyagramı, güven ve öndeyi aralıkları.

4. BİLGİSAYAR İLE ÇÖZÜM

```
 10  PRINT "DOĞRUSAL REGRESYON ÇİZGİSİ, GÜVEN VE ÖNDEYİ ARALIKLARI"
 20  CLEAR
 30  INPUT "n, örnek büyüklüğü ="; N
 40  INPUT "tahmini bulunacak x sabit değeri ="; X
 50  INPUT "t α/2,f ="; T
 60  DIM X(N), Y(N)
 70  XORT = 0
 80  YORT = 0
 90  RT = 0
100  YT = 0
110  DELTA = 0
120  FARK = 0
130  FOR I = 1 TO N
140  INPUT "X(I)"; X(I)
150  INPUT "Y(I)"; Y(I)
160  XORT = XORT + X(I) / N
170  YORT = YORT + Y(I) / N
180  RT = RT + X(I) * Y(I)
190  YT = YT + (X(I) ^ 2)
200  NEXT I
210  BETA = (RT - N * XORT * YORT) / (YT - N * (XORT ^ 2))
220  ALFA = YORT - (BETA * XORT)
230  YREG = ALFA + BETA * X
```

```
240  FOR I = 1 TO N
250  YREG(I) = ALFA + BETA * X(I)
260  DELTA = DELTA +(Y(I) - YREG(I)) ^ 2
270  FARK = FARK + (X(I) - XORT) ^ 2
280  NEXT I
290  SYX = (DELTA / (N - 2)) ^ (1 / 2)
300  S1 = (ALFA + BETA * X) - T * SYX * ((1 / N) + (X - XORT) ^ 2 / FARK) ^ (1 / 2)
310  S2 = (ALFA + BETA * X) +T * SYX * ((1 / N) + (X - XORT) ^ 2 / FARK) ^ (1 / 2)
320  S3 = (ALFA + BETA * X) - T * SYX * (1 + (1 / N) + (X - XORT) ^ 2 / FARK) ^ (1 / 2)
330  S4 = (ALFA + BETA * X) +T * SYX * (1 + (1 / N) + (X - XORT) ^ 2 / FARK) ^ (1 / 2)
340  PRINT "ŷ , x sabit değeri için tahmini değer ="; YREG
350  PRINT "Koşullu standart sapma sY/x ="; SYX
360  PRINT "α̂ ="; ALFA
370  PRINT "β̂ ="; BETA
380  PRINT "Doğrusal regresyon çizgisi yi =α̂+β̂*xi "
390  PRINT "Güven aralığı (alt sınır;)"; S1
400  PRINT "Güven aralığı (üst sınır;)"; S2
410  PRINT "Öndeyi aralığı (alt sınır;)"; S3
420  PRINT "Öndeyi aralığı (üst sınır;)"; S4
430  GOTO 10
```

5. UYGULAMANIN BİLGİSAYARLA ÇÖZÜMÜ

Giriş bilgileri: n, örnek büyüklüğü = 9

tahmini bulunacak x sabit değeri =4

$t\ \alpha/2,f$ = 2.365

Çıkış bilgileri: $\hat{y}$, x sabit değeri için tahmini değer = 11.97807

Koşullu standart sapma sY/x =0.538765

$\hat{\alpha}$ =0.256942

$\hat{\beta}$ =2.930281

Doğrusal regresyon çizgisi $y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} * x_i$

Güven aralığı (alt sınır;) 11.498375

Güven aralığı (üst sınır;) 12.457757

Öndeyi aralığı (alt sınır;) 10.616583

Öndeyi aralığı (üst sınır;) 13.339549

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Mühendislik alanında çoğu zaman aralarında istatistiksel ilişki bulunan iki değişkenli olgularla karşılaşılır. Gene çoğu kez, bu değişkenlerden biri kontrol edilebilen değişken, öteki rasgele değişken olur. Örnekse, derinlik ile zeminin basınç mukavemeti arasındaki ilişkide derinlik deterministik değişken, mukavemet rasgele değişkendir. Bu bağlamda regresyon çözümlemesi, rasgele değişkenin ortalamasının ve varyansının bağımsız değişkenin fonksiyonu olarak belirlenmesi işlemi olur. Anılan koşullu ortalama değer bağımsız değişkenin doğrusal fonksiyonu ise doğrusal regresyon sözkonusudur.

İlgili serpilme/dağılma diyagramındaki veri noktalarının doğrusal yörüngeli olması, doğrusal regresyon yapılabileceğini belirtir.
Doğrusal regresyonda bağımlı değişkenin koşullu ortalama değer fonksiyonunun parametreleri örnek verilerinden elde edilen en küçük kareler tahminleriyle belirlenir. Böylece, doğrusal regresyon doğrusu, en küçük-kareler regresyon doğrusuyla tahmin edilir. Anılan parametrelere ilişkin tahminler nokta tahminleri olduğu için bu tahminlerin duyarlılık dereceleri güven aralıklarıyla güvence altına alınır. Mühendisleri ilgilendiren bir başka önemli aralık da, bağımsız değişkenin belirli bir değeri için, bağımlı değişkenin gelecekte gözlenecek değerini içermesi beklenen öndeyi aralığıdır.
Makalede, doğrusal regresyon çözümlemesi için gerekli tüm bağıntılar verilmiştir. Çözümleme, hesap makinesiyle ya da makalede geliştirilen bilgisayar programıyla çok kısa sürede gerçekleştirilebilir.
Algoritma bağıntılarının tümü örnek verilerini içeren aralık için geçerlidir. Ekstrapolasyon yapılmamalıdır. Koşullu olasılık ortalama değer fonksiyonuna ilişkin güven ve öndeyi aralıkları da duyarlı dağılım uyumu sağlaması bakımından t-dağılımına göre tahmin edilmelidir.

KAYNAKLAR

[1] BENJAMIN, J.R., and CORNELL, C.A., Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers, First Edition, McGraw-Hill, New York, 1970, 419-440, 662-664.

[2] ANG,A.H-S., and TANG, W.H., Probability Concepts in Engineering Planning and Design, V.I, Basic Principles, First Edition, Wiley, New York. 1975, 286-319, 383.

[3] KICIMAN, M.,Mühendisler İçin İhtimaller Hesabı ve İstatistiğe Başlangıç, 1.Basım, ODTÜ, Yayın No.46, Ankara, 1975, 121-133.

[4] WALPOLE, R.E., and MYERS, R.H., Probability and Statistics for Engineers and Scientists, First Edition, McMillan, New York, 1978, 280-358, 514.

[5] HOEL, P.G., Introduction to Mathematical Statistics, Fifth Edition, Wiley, New York, 1984, 192-210, 420.

[6] BAYAZIT, M., ve OĞUZ, B., 1.Basım, Mühendisler için İstatistik, 1.Basım, Birsen Yayınevi, İstanbul 1985, 155-179, 182.

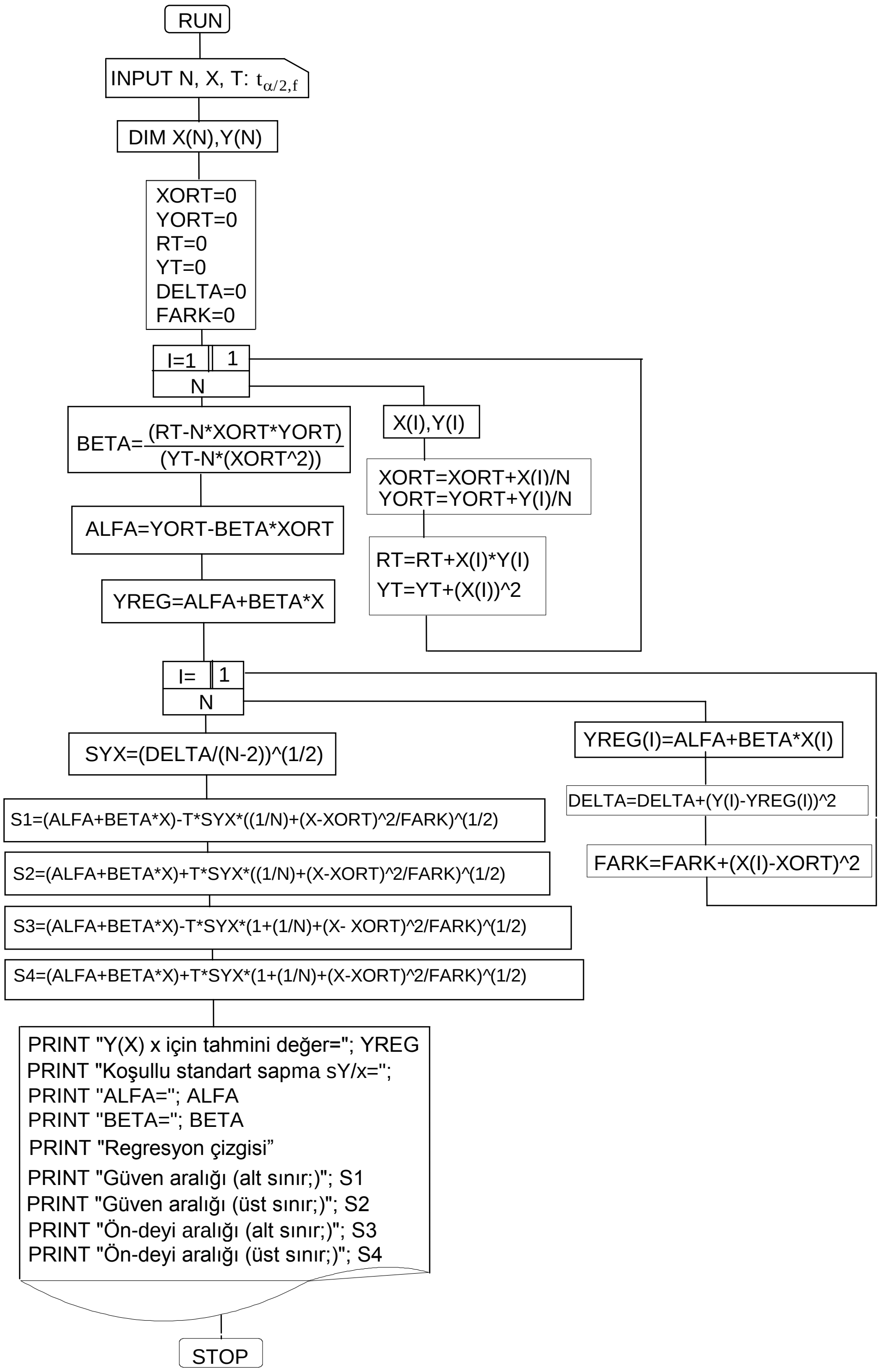
[7] SPIEGEL, M.R., Theory and Problems of Statistics, Second Edition, McGraw-Hill, London, 1992, 264-290, 488.

[8] CHATFIELD, C., Statistics for Technology, Third Edition, Chapman and Hall, London, 1994, 166-199, 342,343.

[9] METCALFE, A.V., Statistics in Engineering, First Edition, Chapman and Hall, London, 1994, 208-224, 426.

[10] SEZGİNMAN, İ., Olasılık-Teori ve Problemleri, 1.Basım, Eğitim yayınları A.Ş. matbaası, İstanbul, 1995, 221-234.

[11] GÜNDÜZ, A., Mühendislikte Olasılık, İstatistik, Risk ve Güvenilirlik, 1.Basım, Küre Basım Yayım Ltd.Şti., İstanbul, 1996, 206-226, 373.
Ek-Bilgisayar programı


RUN
INPUT N, X, T: $t_{\alpha/2,f}$
DIM X(N),Y(N)
XORT=0
YORT=0
RT=0
YT=0
DELTA=0
FARK=0
I=1 1
N
X(I),Y(I)
XORT=XORT+X(I)/N
YORT=YORT+Y(I)/N
RT=RT+X(I)*Y(I)
YT=YT+(X(I))^2
BETA= (RT-N*XORT*YORT) / (YT-N*(XORT^2))
ALFA=YORT-BETA*XORT
YREG=ALFA+BETA*X
I= 1
N
YREG(I)=ALFA+BETA*X(I)
DELTA=DELTA+(Y(I)-YREG(I))^2
FARK=FARK+(X(I)-XORT)^2
SYX=(DELTA/(N-2))^(1/2)
S1=(ALFA+BETA*X)-T*SYX*((1/N)+(X-XORT)^2/FARK)^(1/2)
S2=(ALFA+BETA*X)+T*SYX*((1/N)+(X-XORT)^2/FARK)^(1/2)
S3=(ALFA+BETA*X)-T*SYX*(1+(1/N)+(X- XORT)^2/FARK)^(1/2)
S4=(ALFA+BETA*X)+T*SYX*(1+(1/N)+(X-XORT)^2/FARK)^(1/2)
PRINT "Y(X) x için tahmini değer="; YREG
PRINT "Koşullu standart sapma sY/x=";
PRINT "ALFA="; ALFA
PRINT "BETA="; BETA
PRINT "Regresyon çizgisi”
PRINT "Güven aralığı (alt sınır;)"; S1
PRINT "Güven aralığı (üst sınır;)"; S2
PRINT "Ön-deyi aralığı (alt sınır;)"; S3
PRINT "Ön-deyi aralığı (üst sınır;)"; S4
STOP