YTÜD 2001/4

ARAŞTIRMA MAKALESİ

DOĞRUSAL YÜZEYLERİN İZOMETRİK TASVİRLERİ ÜZERİNE

Filiz KANBAY

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş Tarihi: 16.04.2001

ON ISOMETRICAL MAPS OF RULED SURFACES

SUMMARY

The ruled surfaces which are isometrically mapped to each other are studied. Bonnet showed that if two ruled surfaces, S and $\bar{S}$ are applicable to one another, the generators correspond unless the surfaces are applicable to a quadric with the generators of S and $\bar{S}$ corresponding to the different systems of the quadric. In this paper, the quantities of these surfaces are calculated and the existence problem of these surfaces is solved completely.

ÖZET

Bu çalışmada birbiri üzerine izometrik olarak tasvir edilebilen açılabilir olmayan doğrusal yüzeyler üzerinde durulmuştur. Bonnet doğuranlar karşılıklı gelmeksizin izometrik tasvir edilebilen iki doğrusal yüzeyin var olması halinde bunların aynı bir kuvadriğe izometrik olarak tasvir edilebildiğini göstermiştir. Bu çalışmada bu özelliği taşıyan doğrusal yüzeylerin temel büyüklükleri elde edilmiş ve böylece bu yüzeylerle ilgili varlık problemi tam olarak çözülmüştür.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, 3 boyutlu Öklid uzayında iki yüzey arasında karşılıklı noktalardaki metriği koruyan yani izometrik olan tasvirler üzerinde durulmuştur. Yüzeylerin izometrik tasviri problemi, genel halde çözümsüzdür. Bu nedenle problem çeşitli özel hallerde ele alınmıştır. Bu çalışmada da iki doğrusal yüzey arasındaki izometrik tasvir problemi üzerinde durulmuştur.

İki doğrusal yüzey arasında, doğuranları koruyan ya da korumayan olmak üzere iki türlü izometrik tasvir söz konusudur. Açılabilir yüzey halinde doğuranlar ve dik yörüngeleri eğrilik çizgileri olduğundan, iki açılabilir yüzey arasındaki doğuranları koruyan bir izometrik tasvir eğrilik çizgilerini koruyan bir izometrik tasvir olur. Açılabilir yüzeyler arasındaki böyle bir tasvir problemi Blaschke tarafından tam olarak çözülmüştür [1].

Teorem 1.1: Açılabilir olmayan bir doğrusal yüzey doğuranları karşılıklı gelmek koşulu ile, doğrulman konisi tamamen keyfi seçilebilecek olan başka bir doğrusal yüzey üzerine izometrik olarak tasvir edilebilir [2]

İki doğrusal yüzey arasındaki doğuranları korumayan izometrik tasvir problemini ise ilk olarak Bonnet ele almış ve şu sonucu elde etmiştir [3]:

Teorem1.2 (Bonnet teoremi) :Açılabilir olmayan iki doğrusal yüzey, doğuranları karşılıklı gelmeksizin, birbiri üzerine izometrik olarak tasvir edilebiliyorsa bu yüzeyler aynı bir kuvadriğe izometrik olarak tasvir edilebilirler ve bu tasvirde bir yüzeyin doğuran sistemi, kuvadriğin iki doğuran sisteminden birine, ikinci yüzeyin doğuran sistemi de kuvadriğin öteki doğuran sistemine karşılık gelir [3], [4], [5] .

Görüldüğü gibi, bu sonuç, doğuranları karşılıklı gelmeksizin izometrik olarak tasvir edilebilen iki doğrusal yüzeyin var olması halinde geçerlidir. Dolayısıyla böyle doğrusal yüzeylerin var olup olmadığı sorusu açıkta kalmaktadır. Bu çalışmada bu özelliği taşıyan yüzeylerin temel büyüklükleri belirlenmiş ve dolayısıyla yüzeylerin temel teoremi gereğince, bunların varlığı kanıtlanmıştır.

2. Birbiri Üzerine İzometrik Olarak Tasvir Edilebilen Doğrusal Yüzeylerin Büyüklükleri

2.1 Doğuranları Koruyan İzometrik Tasvir

3 boyutlu Öklid uzayında bir doğrusal yüzey, doğuran adı verilen bir doğrunun hareketi ile doğurulan bir yüzey olarak tanımlanır. Böyle bir yüzey, $\mathbf{T}=\mathbf{T}(v)$ doğuran doğrultusundaki birim vektör, $\mathbf{r}=\mathbf{r}(v)$ yüzey üzerinde bulunan ve $\mathbf{T}$ yi dik olarak kesen keyfi bir eğri (doğrultman) olmak üzere

$$\mathbf{x}(u,v)=\mathbf{r}(v)+u\,\mathbf{T}(v) \tag{1}$$

denklemi ile verilir. $\mathbf{T}=\mathbf{T}(v)$, bir birim küresel eğri olup yüzeyin doğrultman konisini belirler. Burada v bu küresel eğrinin yay uzunluğudur. O halde

$$\mathbf{T}^2(v)=\mathbf{T}'^2(v)=1 \quad , \ \mathbf{r}'(v)\cdot\mathbf{T}(v)=0 \qquad (\mathbf{T}\,.\,\mathbf{T}'=0) \tag{2}$$

dır.

$v=$sbt. ler doğuranları $u=$sbt. ler de dik yörüngeleri göstermektedir. Öte yandan

$$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{T}'=-\sigma \ , \ \mathbf{r}'^2=\beta^2+\sigma^2 \tag{3}$$

ile belirli $\sigma=\sigma(v)$, $\beta=\beta(v)$ ye sırasıyla yüzeyin *boğaz noktasının apsisi* ve *dağılma parametresi* adı verilir [2].

(2) ve (3) denklemleri (1) de kullanılırsa doğrusal yüzey 1.ve 2. esas formun katsayıları

$$E=1 \ , \ F=0 \ , \ G=(u-\sigma)^2+\beta^2 \ , \ \left(+\sqrt{EG-F^2}=w=+\sqrt{G}\equiv g\right);$$
$$L=0 \ , \ M=-\frac{\beta}{w} \ , \ N=\frac{1}{w}\left\{D(v)\left[(u-\sigma)^2+\beta^2\right]+(u-\sigma)\beta'+\beta\sigma'\right\}, \tag{4}$$

dır ve buna göre, yüzeyin Gauss eğriliği

$$\left(K=\frac{LN-M^2}{w^2}=\frac{-\beta^2}{w^4} \right) \tag{5}$$

şeklinde elde edilir. O halde $K=0$ ile tanımlı açılabilir olmayan doğrusal yüzeyler $\beta=0$ ile karekterize edilir. Burada açılabilir olmayan doğrusal yüzeylerle ilgilendiğimizden,

$$\beta \neq 0 \tag{6}$$

varsayacağız. (4) de $D(v)$ fonksiyonu, $\beta \neq 0$ için

$$D(v)=\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{T}''}{\beta}==\left(\mathbf{T},\mathbf{T}',\mathbf{T}''\right) \tag{7}$$

şeklinde tanımlı olup, yüzeyin doğrultman konisini belirler. Gerçekten, doğrultman koniyi belirleyen birim küresel eğrinin eğriliği κ , burulması τ ise

$$\kappa^2=D^2+1 \quad , \quad \tau=\frac{D'}{1+D^2} \tag{8}$$

dır [2].

Görülüyor ki bir S doğrusal yüzeyinin büyüklükleri, doğuranlar ve dik yörüngeleri koordinat sisteminde $\beta(v)$ dağılma parametresi, $\sigma(v)$ apsisi ve $D(v)$ fonksiyonları ile belirmektedir.

$\overline{S}$ doğuranları koruyan bir tasvir ile S doğrusal yüzeyine tasvir edilen bir doğrusal yüzey olsun. $\overline{S}$ yüzeyi üzerinde de koordinat sistemi doğuranlar ve dik yörüngelerinden oluşacaktır. Çünkü izometrik tasvirde açılar da korunur. S ile $\overline{S}$ arasındaki tasvirin u , v parametrelerinin aynı değeri ile yapıldığını ve $\overline{S}$ nin $\overline{\beta}$, $\overline{\sigma}$ fonksiyonlarının da

$$\overline{\beta}=\varepsilon\,\beta \quad , \quad \overline{\sigma}=\sigma \quad , \quad (\ \varepsilon=\mp 1\ ) \tag{9}$$

şeklinde olduğunu varsayarsak, (4) gereğince, $\overline{S}$ nin birinci esas fom katsayıları da $\overline{E}=1$, $\overline{F}=0$, $\overline{G}=(u-\overline{\sigma})^2+\overline{\beta}^2$ olacağından, tasvirin izometrik olacağı açıktır. Öte yandan, yine (4) gereğince $\overline{S}$ yüzeyinin $\overline{D}(v)$ fonksiyonu tamamen keyfi alınabilecektir. O halde girişte sözünü ettiğimiz teorem 1.1 e göre, büyüklükleri keyfi bir $\overline{D}(v)$ fonksiyonu ve (9) daki $\overline{\beta}(v)$, $\overline{\sigma}(v)$ ile beliren $\overline{S}$ doğrusal yüzeyi, S doğrusal yüzeyinin doğuranları koruyan, en genel izometrik tasvirini oluşturur.

2.2 Doğuranları Korumayan İzometrik Tasvir

Bir $S(\mathbf{x})$ doğrusal yüzeyinin $\overline{S}(\ \mathbf{y})$ doğrusal yüzeyi üzerine, doğuranlar karşılıklı gelmeksizin, izometrik tasvir edildiğini varsayalım ve S üzerinde, S nin doğuranları ile

$\bar{S}$ nin doğuranlarının S deki tasvir ailesinin oluşturduğu şebekenin açı ortay şebekesini gözönüne alalım. Bir dik sistem oluşturan bu şebeke,izometrik tasvir açılarını da koruduğundan; S nin $\bar{S}$ üzerindeki izometrik tasvirinde yine bir dik sisteme karşılık gelecektir. Kuvadriğin üzerindeki bu dik sistem teorem 1.2 de sözü geçen S ve $\bar{S}$ doğrusal yüzeylerinin doğuranlarının S^o kuvadriği üzerindeki izometrik tasvirlerinin açı ortay şebekesidir. Şimdi, S ve $\bar{S}$ doğrusal yüzeyleri üzerinde saptadığımız bu dik şebekelerin girişte de sözünü ettiğimiz teorem 1.2 (Bonnet teoremi) deki S^o kuvadriği üzerindeki karşılığını düşünelim:
Bonnet teoremine göre, S^o kuvadriği üzerine olan izometrik tasvirde, S nin doğuranları S^o kuvadriğinin iki doğuran sisteminden birine, $\bar{S}$ ninkiler de diğer doğuran sistemine karşılık geldiğinden, S ve $\bar{S}$ üzerinde yukarıda sözünü ettiğimiz dik şebekeler S^o kuvadriği üzerinde, iki doğuran şebekesinin açı ortay şebekesine karşılık gelecektir. S^o ın doğuranları, aynı zaman da asimptotik çizgileri de olduğu için, bunların açıortay şebekesi S^o ın eğrilik çizgilerinden oluşur. Böylece şu önemli sonucu elde etmiş oluyoruz:

Teorem 2.1: S, $\bar{S}$ yüzeyleri ve S^o kuvadriği arasındaki izometrik tasvirde, (u,v) koordinat şebekesi olarak S^o ın eğrilik çizgileri alınırsa, bu şebekeye S, $\bar{S}$ üzerinde karşılık gelen dik şebekeler de S, $\bar{S}$ nin (u,v) koordinat şebekeleri olur. Fazla olarak, S^o ın bir doğuran sistemi v =sbt. eğrilik çizgisi ile φ açısı yapıyorsa , S nin doğuranları v =sbt. koordinat eğrisi ile aynı φ açısını, $\bar{S}$ ninkiler ise (-φ) açısını yapar. Bu yüzden S den $\bar{S}$ ye geçerken φ yerine (-φ) koymak yetecektir.

Bu genel saptamalardan sonra S ve $\bar{S}$ nin büyüklüklerinin araştırılmasına geçebiliriz. Bu büyüklükleri S^o kuvadriğininkiler ile doğrudan ilgilidir. Doğrusal yüzeylerimizde doğuranlar reel olduğu için S^o kuvadriği de reel doğuranlı olmak zorundadır. Yani S^o, ya bir parçalı hiperboloid yada hiperbolik paraboloiddir. Bu iki yüzey karakter bakımından tamamen farklı (biri merkezli öteki değil) olduğundan , S ve $\bar{S}$ doğrusal yüzeylerin büyüklüklerini elde etmek için iki hali ayrı ayrı incelemek gerekir.

2.2.1 S^o kuvadriğinin bir parçalı hiperboloid olma hali

S^o kuvadriği bir parçalı hiperboloid olsun. O halde S^o bir merkezli kuvadriktir. Bir merkezli kuvadrik

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1 \qquad (\ a\ ,\ b\ ,\ c\ = \text{sbt.})$$

denklemi ile verilir ve (u,v) eğrilik çizgileri parametrelerinde

$$x^2 = \frac{a(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)}, \quad y^2 = \frac{b(b-u)(b-v)}{(b-a)(b-c)}, \quad z^2 = \frac{c(c-u)(c-v)}{(c-a)(c-b)} \tag{10}$$

şeklinde parametrelenir [5]. Bu kuvadrik, $v < c < 0 < b < u < a$ koşulu altında bir parçalı hiperboloiddir ve büyüklükleri

$$E = \frac{u(u-v)}{f(u)} \quad , \qquad F = 0 \quad , \qquad G = \frac{v(v-u)}{f(v)} \; ;$$

$$L = -\sqrt{\frac{abc}{uv}} \cdot \frac{(u-v)}{f(u)} \; , \; M = 0 \; , \; N = \sqrt{\frac{abc}{uv}} \cdot \frac{(u-v)}{f(v)} \quad ; \quad \left[f(x) \equiv 4(a-x)(b-x)(c-x) \right] \tag{11}$$

İle verilir[5]. Buna göre r ve r^* asal eğrilikleri

$$r = -\frac{1}{u}\sqrt{\frac{abc}{uv}} \; , \; r^* = -\frac{1}{v}\sqrt{\frac{abc}{uv}} \; , \; \left(K = rr^* = \frac{abc}{u^2v^2} \right) \tag{12}$$

dır. Öte yandan, S^o kuvadriğinin doğuranlarının v =sbt. eğrilik çizgisi ile yaptığı açılara sırasıyla φ ve (-φ) dersek, bu doğuranlar yüzeyin asimptotiklerini oluşturduğundan, (11) den büyüklüklerine göre,

$$\tan\varphi = +\sqrt{-\frac{v}{u}} \qquad , \qquad \left(\sin\varphi = \sqrt{\frac{-v}{u-v}} \quad , \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{u}{u-v}} \right) \tag{13}$$

bulunur.

Artık S ve $\bar{S}$ yüzeylerinin temel büyüklüklerini hesaplayabiliriz. Önce S doğrusal yüzeyinin büyüklüklerini arayalım. (u,v) dik koordinat sisteminde, bir yüzeyin temel büyüklüklerinin, 1. esas formun katsayıları ve v =sbt. , u =sbt. koordinat eğrilerinin k , k^* normal eğrilikleri ve t , $-t$ geodezik burulmaları ile verildiğini biliyoruz. S yüzeyi, S^o kuvadriğine izometrik olarak tasvir edilebildiğinden 1. esas formun katsayıları (11) de verilen E , F , G ile aynıdır. Yukarıda, S nin doğuranlarının (u,v) dik koordinat sisteminin v =sbt. eğrileri ile yaptığı açının S^o da sözünü ettiğimiz φ açısına eşit olduğunu söylemiştik. Buna göre normal eğriliğin tanımını ve v =sbt. ler ile φ açısı yapan doğuranların normal eğriliklerinin sıfır olduğu kullanılarak, $k\cos^2\varphi + k^*\sin^2\varphi + 2t\sin\varphi\cos\varphi = 0$ ve dolayısıyla

$$k + k^*\tan^2\varphi + 2t\tan\varphi = 0 \tag{14}$$

elde edilir. Gauss eğriliği izometrik bir invariyant olduğundan, S nin Gauss eğriliği S^o yüzeyininki ile aynıdır ve dolayısıyla (12) den

$$K = k\,k^* - t^2 = r\,r^* = \frac{abc}{u^2v^2} \tag{15}$$

yazılabilir. (14) ve (15) den önce

$$k = -\tan\varphi\left(\sqrt{-\frac{abc}{u^2v^2}} + t\right) \quad , \quad k^* = \cot\varphi\left(\sqrt{-\frac{abc}{u^2v^2}} - t\right)$$

sonra da (13) kullanılarak

$$k = -t\sqrt{-\frac{v}{u}} - \sqrt{\frac{abc}{u^3v}} \quad , \quad k^* = -t\sqrt{-\frac{u}{v}} + \sqrt{\frac{abc}{uv^3}} \tag{16}$$

bulunur. Bu k , k^* değerleri

$$\begin{aligned} k_v &= \frac{e_v}{e}(k^* - k) + \frac{g}{e}\left(t_u + 2\frac{g_u}{g}t\right) \\ k_u^* &= \frac{g_u}{g}(k - k^*) + \frac{e}{g}\left(t_v + 2\frac{e_v}{e}t\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Mainardi-Codazzi uygunluk denklemlerini sağlamalıdır. (11) ve (16) , (17) denklemlerinde kullanılacak olursa, (17) için her iki denklem

$$\sqrt{f(u)}\,t_u + \sqrt{f(v)}\,t_v + \frac{t}{u-v}\left(\sqrt{f(u)} - \sqrt{f(v)}\right) = 0 \tag{18}$$

denklemine dönüşür. Birinci mertebeden kısmi türevli lineer denklemlerin çözüm yöntemi kullanılarak bu denklemin genel çözümü,

$$\alpha'(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \quad , \quad [\ \alpha(x) \text{ bir eliptik integral }] \tag{19}$$

ve T bir keyfi fonksiyon olmak üzere,

$$t = \frac{T[\alpha(u) - \alpha(v)]}{u-v} \tag{20}$$

şeklinde elde edilir. Gauss uygunluk denklemi S^o kuvadriği için sağlandığından (15) gereğince S için de sağlanır.Böylece S doğrusal yüzeyinin büyüklükleri E , F , G , t , k , k^* ve keyfi $T\left[\alpha(u) - \alpha(v)\right]$ fonksiyonuna bağlı olarak elde edilir.

$\overline{S}$ doğrusal yüzey için yukarıda φ yerine (- φ) alınır ve benzer işlemlerle

$$\overline{k} = \sqrt{-\frac{v}{u}}\,t - \sqrt{\frac{abc}{u^3v}} \quad , \quad \overline{k}^* = \sqrt{-\frac{u}{v}}\,t + \sqrt{\frac{abc}{uv^3}} \tag{21}$$

bulunur. Bununla ilgili Mainardi-Codazzi denklemi

$$\sqrt{f(u)}\; t_u - \sqrt{f(v)}\; t_v + \frac{t}{u-v}\left[\sqrt{f(u)}+\sqrt{f(v)}\right]=0 \qquad (22)$$

dir. Bunun da çözümü yukarıdakine paralel olarak

$$t=\frac{P[\alpha(u)+\alpha(v)]}{u-v} \quad , \quad (\ P \text{ bir keyfi fonksiyon }) \qquad (23)$$

olarak elde edilir.

Buna göre $\bar{S}$ nin büyüklükleri de, E , F , G , $\bar{k}$, $\bar{k}^*$, t nin (23) değerleri ile ve keyfi $F[\alpha(u)+\alpha(v)]$ fonksiyonuna bağlı olarak bulunur.

2.2.2 S^o kuvadriğinin hiperbolik paraboloid olma hali

S^o kuvadriği bir hiperbolik paraboloid olsun. Genel bir

$$2z = a x^2 + b\, y^2 \quad , \quad (\ a\ ,\ b = \text{sbt.}\ ) \qquad (24)$$

paraboloidi, $ab<0$ için bir hiperbolik paraboloiddir. Şimdi

$$a>0 \quad , \quad b<0 \qquad (25)$$

olsun. (24) denklemleri ile verilen genel paraboloid (u,v) eğrilik çizgileri parametrelerinde

$$x^2 = \frac{a-b}{b}uv\ ,\ \ y^2=\frac{b-a}{ab^2}(au+1)(av+1)\ \ ,\ \ z=\frac{1}{2}\frac{b-a}{ab}(au+av+1) \qquad (26)$$

şeklinde parametrelenir [5]. Buradan yüzeyin 1.ve 2.esas formunun katsayıları

$$E=\frac{a-b}{4b^2}(u-v)\frac{a(a-b)u-b}{u(au+1)} \quad , \quad G=\frac{b-a}{4b^2}(u-v)\frac{a(a-b)v-b}{v(av+1)} \quad , \quad F=0\,;$$

$$L=\frac{-\varepsilon'\sqrt{a^3}}{4\sqrt{b[a(a-b)u-b][a(a-b)v-b]}}\frac{(a-b)(u-v)}{u(au+1)} \quad , \quad M=0 \qquad (27)$$

$$N=\frac{\varepsilon'\sqrt{a^3}}{4\sqrt{b[a(a-b)u-b][a(a-b)v-b]}}\frac{(a-b)(u-v)}{v(av+1)} \quad , \qquad (\ \varepsilon'=\mp 1\ )$$

olarak bulunur. (25) hiperbolik paraboloid koşuluna ek olarak (26) dan bulunacak (reellik gerekçesi ile)

$$uv<0 \quad , \quad (au+1)(av+1)<0 \qquad (28)$$

koşulları da sağlanmalıdır. (25), (28) den de

$$\left[a(a-b)u-b\right]\left[a(a-b)v-b\right]<0 \tag{29}$$

bulunur. Böylece (27) de, kök içlerinin pozitif olması sağlanmış olduğu gibi, ($E\,G>0$, $E+G>0$ olduğu gösterilerek) , $E>0$, $G>0$ olmasının da sağlandığı kanıtlanmış olur. Genelliği bozmayacağı için, (27) de $\varepsilon'=1$ alınacaktır. Artık 2.2.1 de bir parçalı hiperboloid halindekine paralel olarak gelişecek olan işlemlere geçebiliriz. Önce yazılışta kısalığı sağlamak amacı ile

$$a(a-b)u-b\equiv U \quad , \quad a(a-b)v-b\equiv V \tag{30}$$

diyelim. Hiperbolik paraboloidin doğuranlarının v =sbt. eğrilik çizgisi ile yaptığı açılara sırasıyla φ ve (- φ) dersek (27) den

$$\tan\varphi=+\sqrt{-\frac{V}{U}} \tag{31}$$

bulunur. (14) denklemi (31) için de sağlanmalıdır. Öte yandan (27) den, S^o ve dolayısıyla S ve $\overline{S}$ doğrusal yüzeylerinin Gauss eğriliği

$$K=\frac{a^3b^3}{U^2\mathbf{V}^2} \qquad \left(=kk^*-t^2\right) \tag{32}$$

olarak bulunur. (14), (31), (32) den S doğrusal yüzeyi için,

$$\begin{aligned} k&=-\tan\varphi(t+\varepsilon\sqrt{-K}\ ) && \left(=-\sqrt{-\frac{V}{U}}\,t+\frac{ab\sqrt{-ab}}{U\sqrt{-UV}}\right) , \\ k^*&=-\cot\varphi(t-\varepsilon\sqrt{-K}\ ) && \left(=-\sqrt{-\frac{U}{V}}\,t+\frac{ab\sqrt{-ab}}{V\sqrt{-UV}}\right) , \end{aligned} \tag{33}$$

bulunur. $t=0$ için $k=r$, $k^*=t^*$ olacağından

$$\varepsilon=\text{işa}\,(U)=-\text{işa}\,(V) \tag{34}$$

elde edilir. (27) deki E , G değerleri gözönünde bulundurularak k , $\boldsymbol{k}^*$ ın (33) deki ifadeleri (17) denklemlerinde kullanılırsa her iki denklemin de, t için lineer ve homogen olan

$$\sqrt{\left|u(au+1)\right|}\,t_u+\sqrt{\left|v(av+1)\right|}\,t_v+\left(\sqrt{\left|u(au+1)\right|}-\sqrt{\left|v(av+1)\right|}\right)\frac{t}{u-v}=0 \tag{35}$$

denklemine dönüştüğü görülür. Bu denklemin (18) ile olan benzerliği açık olarak görülmektedir. Gerçekten (18) daki $f(x)$ fonksiyonu yerine burada $h(x)=x(ax+1)$ fonksiyonu gelmektedir ve (19) da tanımlanan $\alpha(x)$ fonksiyonu burada elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Sonuçta, (35) denkleminin genel çözümünü, bir değişkenli T keyfi fonksiyonuna bağlı olarak,

$$-\frac{1}{a} < u \ , \ v < 0 \ , \ [u(au+1) < 0 \ , \ v(av+1) < 0 \ ] \tag{36}$$

olması halinde

$$t = \frac{1}{u-v} T[z] \ , \quad z = (2au+1)\sqrt{-v(av+1)} - (2av+1)\sqrt{-u(au+1)} \tag{37}$$

(36) koşulu dışındaki hal için de

$$t = \frac{1}{u-v} T[z] \ , \quad z = \frac{2\sqrt{au(au+1)} + au + 1}{2\sqrt{av(av+1)} + av + 1} \tag{38}$$

şeklinde elde ederiz. Gauss denkleminin de kendiliğinden sağlandığını biliyoruz. Böylece, S doğrusal yüzeyinin S^o kuvadriğinin hiperbolik paraboloid olması halinde büyüklüklerini, (27) deki E , F , G değerleri ve t nin (37) deki değeri ile (34) dan elde edilecek k , k^* değeri ile keyfi bir T fonksiyonu cinsinden ifade etmiş oluyoruz.

$\overline{S}$ doğrusal yüzeyi için bu halde yapılacak işlemlerin de, yukarıda φ yerine (-φ) alınarak gelişeceğini biliyoruz. O halde ayrıntıya girmeden sadece sonuçları yazmakla yetinebiliriz. $\overline{S}$ için

$$\begin{aligned} \overline{k} &= t\sqrt{-\frac{V}{U}} + \frac{ab\sqrt{-ab}}{U\sqrt{-UV}} \\ \overline{k}^* &= t\sqrt{-\frac{U}{V}} + \frac{ab\sqrt{-ab}}{V\sqrt{-UV}} \end{aligned} \tag{39}$$

olup uygunluk denklemi

$$\sqrt{|u(au+1)|}\, t_u - \sqrt{|v(av+1)|}\, t_v + \frac{t}{u-v}\left(\sqrt{|u(au+1)|} + \sqrt{|v(av+1)|}\right) = 0 \tag{40}$$

dir. Denklemin çözümleri (36) koşulu altında

$$t = \frac{1}{u-v} P[z] \ , \quad z = (2au+1)\sqrt{-v(av+1)} + (2av+1)\sqrt{-u(au+1)} \tag{41}$$

ve (36) koşulu dışında

$$t = \frac{1}{u-v} P[z] \ , \quad z = (2\sqrt{au(au+1)} + au + 1)(2\sqrt{av(av+1)} + av + 1) \tag{42}$$

olarak bulunur. Burada, (19) ye karşılık olmak üzere, $\alpha(x)$ fonksiyonunun

$$\alpha'(x) = \frac{1}{\sqrt{|x(ax+1)|}}$$

ile verilir.

3. SONUÇLAR

Birbiri üzerine doğuranlar karşılıklı gelmeksizin izometrik olarak tasvir edilebilen yüzeylerle ilgili Bonnet teoreminden yararlanarak, söz konusu doğrusal yüzeylerin büyüklükleri bulunmuştur. Bu doğrusal yüzeyler reel doğuranlı olduğundan, teoremde adı geçen kuvadrik olarak bir parçalı hiperboloid ve hiperbolik paraboloid alınmıştır. Birbirine paralel olmakla birlikte ayrı ayrı yürütülmesi zorunlu olan işlemler sonucunda karşılaşılan kısmi türevli diferansiyel denklemler beklenenden sade çıkmış ve çözümleri mümkün olabilmiştir. Böylece birbirine doğuranlar karşılıklı gelmeksizin izometrik tasvir edilebilen doğrusal yüzeylerin büyüklükleri açık olarak elde edilmiştir. Böylelikle yüzeylerin temel teoremi uyarınca, bunların varlığı da kanıtlanmıştır.

REFERANSLAR

[1] BLASCHKE W., “ Diferansiyel Geometri Dersleri”, (Çev. ERİM K.), istanbul Üniversitesi Yayını 433, İstanbul, 1949, 227-229.

[2] URAS F., “ Diferansiyel Geometri II. Dersleri” Yıldız Üniversitesi Yayınları 261, İstanbul, 1992, 135-146.

[3] DARBOUX G., Leçons Sur La Theorie Generale Des Surfaces Et Les Aplications Geometriques Du calcul İnfenitesimal, T.III. Gautier-Villars Paris 1894, 287.

[4] BİANCHİ L., Vorlasungen Über Differential Geometrie, (Deutsche Übersetzung Von Max Lukaz), Teubner Verlag, Berlin, 1910, 219.

[5] EİSENHART. L.P. “A Treatise On The Differantial Geometry Of Curves And Surfaces” Dover Publications, Inc., New York, 1960, 229-231,347.