

## EN KÜÇÜK KARELERE GÖRE Dengeleme İle Kalman Filtreleme Yöntemi Arasındaki İlişki

Uğur DOĞAN<sup>\*</sup>, Hüseyin DEMİREL<sup>\*</sup>

*\* Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü 80750 Yıldız-İstanbul*

Geliş Tarihi: 08.01.2001

### RELATIONS BETWEEN THE LEAST SQUARES ADJUSTMENT AND THE KALMAN FILTERING METHOD

#### SUMMARY

Kalman filtering method consists of three steps (Prediction, Filtering and Smoothing). Prediction step is used to find the predicted state vector at epoch  $t_k$  based on the state vector at epoch  $t_{k-1}$ , filtering step is used to find the filtered state vector at epoch  $t_k$  based on its predicted state vector and some additional observations at this epoch, smoothing step is used to find the smoothed state vector at epoch  $t_{k-1}$  using all available observations. Kalman filtering method is a particular form of the least-squares adjustment and also, Kalman filtering method equations can be derived based on the least-squares adjustment.

In this study, mathematical model of the Kalman filtering method and its prediction, filtering and smoothing steps were explained. Also, Kalman filtering solution equalities as to the least squares method were investigated.

#### ÖZET

Kalman filtreleme yöntemi prediksyon, filtreleme ve yumuşatma adımlarından oluşur. Prediksyon adımıyla  $t_{k-1}$  zamanındaki durum vektörü temel alınarak bir sonraki  $t_k$  zamanı için beklenen durum vektörü bulunur. Filtreleme adımıyla  $t_k$  zamanına predikte edilmiş durum vektörü ile bu zamanda yapılmış ek ölçüleri kullanarak  $t_k$  zamanındaki durum vektörü belirlenir. Mevcut tüm ölçüler kullanılarak  $t_{k-1}$  zamanındaki düzeltilmiş durum vektörü yumuşatma adımı ile belirlenir. Kalman filtresi en küçük kareler yöntemine göre gruplar halinde dengelemenin özel bir biçimi olup yöntemin çözüm eşitlikleri en küçük kareler ilkesine dayalı olarak elde edilebilir.

Bu çalışmada, Kalman Filtreleme yönteminin matematiksel modeli ve çözüm aşamaları olan prediksyon, filtreleme ve yumuşatma adımları açıklanmış, en küçük kareler yöntemine göre çözüm eşitlikleri incelenmiştir.

#### 1. GİRİŞ

Konum ve hızla ilişkili parametreler ve sistem hataları, genellikle GPS (Global Positioning System) ve ISS (Inertial Survey System) gibi yeni ölçme tekniklerinin birçok

uygulamalarında zaman değişkenlidir. Etkili ve en uygun veri işleme tekniklerinin bazı uygulamaları ya da zaman değişkenli sistemler en küçük kareler ilkesine göre prediksyon, filtreleme ve yumuşatma yöntemlerini temel alır [14].

Bilinen en iyi yöntemlerden biri olan Kalman filtresi, fizikte ve mühendislik bilimlerinin geniş bir yelpazesinde uygulanmış ve jeodezide kullanılan klasik en küçük kareler ilkesine dayanan yöntemler arasında son on yıldır yeni filtreleme tekniği olarak tanınmıştır [10].

Yinelenen gözlemlerle doğrusal parametrelerin kestirimi ve zamana bağlı sistemlerin çözümünde kolaylık sağlayan bu teknik, bilinen kestirim yöntemlerine benzer biçimde türetilir. Bu nedenle Kalman filtresi kestirim teorisinin gelişmesinde önemli bir yer tutmuştur [9]. Bu kestirimin özellikleri şunlardır :

◆ **Doğrusallık**

Bir sistemin  $t_k$  zamanındaki  $\mathbf{x}_k$  durum vektörünün kestirim değeri olan  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , kendisinin önsel kestirim değeri ve  $t_k$  zamanındaki  $\mathbf{I}_k$  ölçü vektörünün doğrusal bir kombinasyonudur.

◆ **Umut Değere Bağlılık**

$\mathbf{x}_k$  durum vektörü ve bunun  $\hat{\mathbf{x}}_k$  kestirim değerinin umut değerleri eşittir.

◆ **Minimum Varyans**

$\hat{\mathbf{x}}_k$  durum vektörünün kovaryans matrisinin izi minimumdur [12].

Kalman filtresi genel olarak, verilerin hatalı olması ve sistemin stokastik modelinin bilinmesi durumunda bilinmeyen parametreleri kestirmek için kullanılır. Ayrıca ilerideki bir ölçme zamanına ilişkin durum vektörünü ve bunun stokastik modelini tanımlar [5].

Bu çalışma 3 bölümden oluşmaktadır. Genel bilgilerin verildiği bu giriş bölümünün ardından gelen 2. bölümde, Kalman filtresinin sistem modeli, prediksyon, filtreleme, yumuşatma kavramları açıklanmaktadır. Son bölümde ise, en küçük kareler yöntemine göre Kalman Filtreleme çözüm eşitlikleri incelenmiştir.

## 2. DOĞRUSAL KALMAN-FİLTRESİ ve SİSTEM MODELİ

### 2.1 Kalman Filtresinin Matematiksel Modeli

Kesikli zamanda gözlenen bir doğrusal sistemin matematiksel modeli aşağıda verilmektedir [1,6,19] :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{T}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad k > 0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{I}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k \quad (2.2)$$

Burada,  $n$  ölçü sayısı,  $u$  bilinmeyen sayısı olmak üzere;  $\mathbf{x}_k$   $t_k$  zamanı için geçerli  $u \times 1$  boyutlu durum vektörü (bilinmeyenler),  $\mathbf{T}_k$   $u \times u$  boyutlu dönüştürme matrisi ( $t_k$  zamanı

için geçerli durum vektörü  $t_{k+1}$  zamanına dönüştürülüyor),  $\mathbf{w}_k$   $u \times 1$  boyutlu sistem hataları vektörü,  $\mathbf{l}_k$   $n \times 1$  boyutlu ölçüler vektörü,  $\mathbf{A}_k$   $n \times u$  boyutlu katsayılar matrisi,  $\mathbf{e}_k$   $n \times 1$  boyutlu ölçü hataları vektörüdür (Şekil 2.1).

Modelin stokastik bölümü açıkça tanımlanmış olmalıdır. İlk kestirimin yapılabilmesi için başlangıç zamanındaki  $\mathbf{x}_0$  durum vektörü ve bunun  $\mathbf{Q}_{x_0 x_0}$  ağırlık katsayıları matrisine gereksinim vardır. Başlangıçtaki durum vektörü başlangıç zamanındaki ölçüler yardımıyla kestirilebilir.

Başlangıçtaki durum vektörünün gerçeğe yakınlığı, filtrenin sisteme uyumunu doğrudan etkiler. Filtrenin doğru sonuç vermesi için başlangıçta belirlenen durum vektörü olabildiğince beklenen değere yakın olmalıdır [2]. Sistem hata vektörü  $\mathbf{w}_k$  ve ölçü hataları vektörü  $\mathbf{e}_k$ 'nin beklenen değerleri "sıfır" ve kovaryansları  $\mathbf{C}_{w_k w_k}$ ,  $\mathbf{C}_{e_k e_k}$  dir :

$$\left\{ \begin{array}{ll} E\{\mathbf{w}_k\} = \mathbf{0}, & E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T\} = \mathbf{C}_{w_k w_k} \\ E\{\mathbf{e}_k\} = \mathbf{0}, & E\{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T\} = \mathbf{C}_{e_k e_k} = \mathbf{C}_{l_k l_k} \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

$k \neq m$  için hata vektörlerinin kovaryans matrisleri sıfıra eşittir :

$$\left\{ \begin{array}{ll} E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_m^T\} = \mathbf{C}_{w_k w_m} = \mathbf{0} \\ E\{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_m^T\} = \mathbf{C}_{e_k e_m} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

Ayrıca  $\mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{e}_k$  arasında korelasyon olmadığı varsayılır :

$$\left\{ \begin{array}{l} E\{\mathbf{e}_k \mathbf{w}_k^T\} = \mathbf{0} \\ E\{\mathbf{w}_k \mathbf{e}_k^T\} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

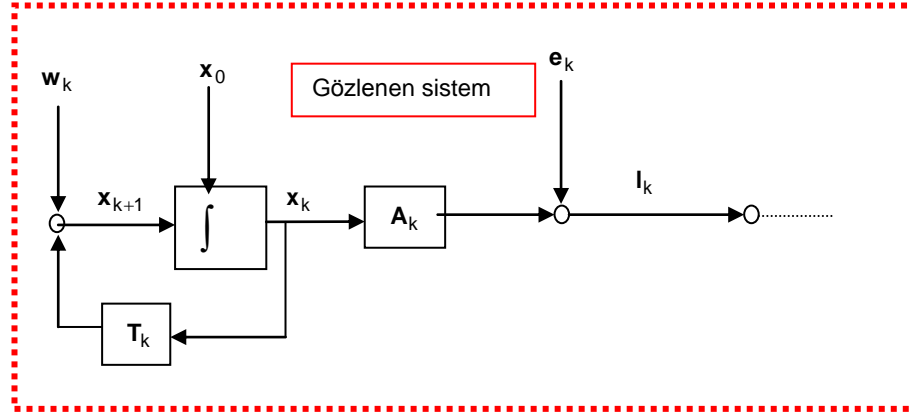
Problem,  $\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_k$  ölçüleri bazında  $\mathbf{x}_k$ 'nin doğrusal, beklenen değere bağlı ve izi en küçük kovaryans matrisli kestirim değerini bulmaktır.  $t_k$  zamanı için durum vektörünün kestirim değeri  $\hat{\mathbf{x}}_k$  ile gösterilirse kestirim hatası  $\mathbf{v}_{\hat{\mathbf{x}}_k}$ ,

$$\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{v}_{\hat{\mathbf{x}}_k} = \mathbf{x}_k \quad (2.6)$$

ve kovaryans matrisi  $\mathbf{C}_{\hat{x}_k \hat{x}_k}$ ,

$$\mathbf{C}_{\hat{x}_k \hat{x}_k} = E\{\mathbf{v}_{\hat{x}_k} \mathbf{v}_{\hat{x}_k}^T\} \quad (2.7)$$

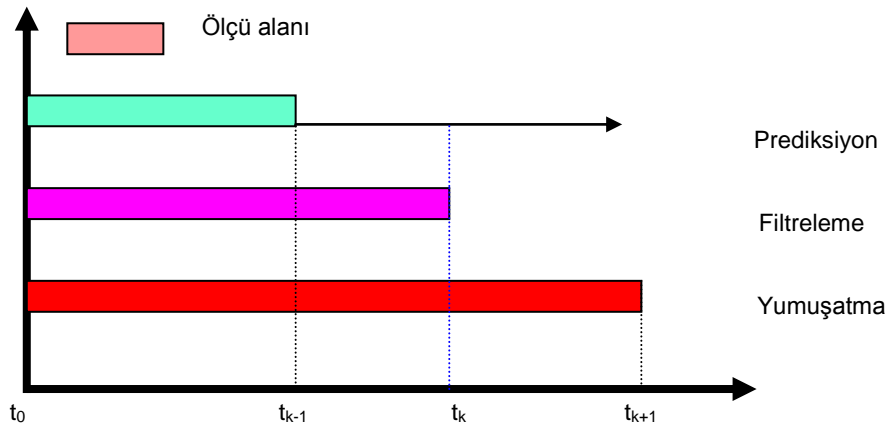
olur.



Şekil 2.1 Kesikli zamanda gözlenen sistem [1,6]

## 2.2 Prediksiyon (Prediction), Filtreleme (Filtering) ve Yumuşatma (Smoothing)

Prediksiyon, filtreleme ve yumuşatma Kalman filtresinin aşamalarını oluşturmaktadır.  $t_{k-1}$  zamanındaki durum vektörünün;  $t_0$  zamanında bulunan bir dinamik sistemin özelliklerinden yararlanarak hesaplanmasına prediksiyon (prediction);  $t_{k-1}$  zamanına predikte edilmiş durum vektörü ile  $t_k$  anındaki ölçüler kullanılarak  $t_k$  zamandaki durum vektörünün belirlenmesine filtreleme (update) ve  $t_{k+1}$  zamanına kadar var olan tüm ölçüler kullanılarak  $t_0$  zamanında ki durum vektörün yeniden belirlenmesine yumuşatma (smoothing) adı verilir (Şekil 2.2) [9,14,3].



Şekil 2.2  $t_k$  zamanı için prediksiyon, filtreleme ve yumuşatma kavramları [14].

Dinamik bir sistem çalışmaya başladığında öncelikle, başlangıç zamanı için  $\mathbf{x}_0$  durum vektörü ve bunun  $\mathbf{Q}_{x_0x_0}$  ağırlık katsayıları matrisi, başlangıç zamanındaki ölçüler dengelenerek (filtreleme) hesaplanır. Durum vektörü, sistemi tanımlamak için gerekli parametreleri, ayrıca tasarıma ve ölçü türüne bağlı ek parametreleri içerir.

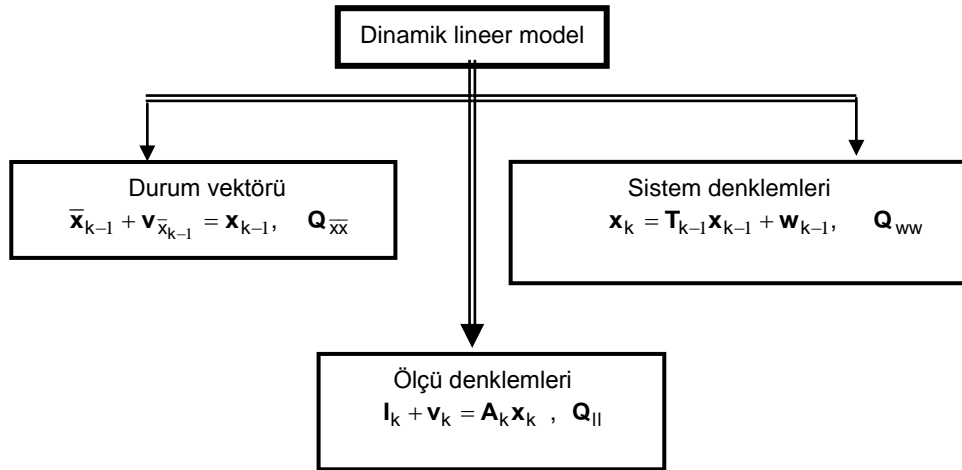
### 3. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNE GÖRE ART ARDA GAUSS-MARKOFF KESTİRİMİ VE KALMAN-FİLTRESİ ÇÖZÜM EŞİTLİKLERİ

Gauss-Markoff modeli aşağıda verilen fonksiyonel ve stokastik modeller ile tanımlanır :

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{fonksiyonel model (düzeltme denklemleri)} \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{P}_I = \mathbf{Q}_{II}^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{C}_{II}^{-1} \quad \text{stokastik model.} \quad (3.1b)$$

$\mathbf{x}_{k-1}$  durum vektörünün  $\bar{\mathbf{x}}_{k-1}$  kestirim değeri ve kovaryans matrisinin bulunduğu varsayılırsa dinamik lineer model, (2.1) ve (2.2) eşitliklerine uygun olarak  $t_{k-1}$  ve  $t_k$  zaman aralığı için üç grup denklem sisteminden oluşur [18] (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Dinamik lineer sistem modeli

$t_k$  zamanına ilişkin durum vektörünün kestirimi için Kalman filtresinin Gauss-Markoff modeli anlamındaki matematiksel modeli aşağıdaki gibidir [14,19]:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\bar{\mathbf{x}}_{k-1}} \\ \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{T}_{k-1} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\bar{x}\bar{x}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{ww} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\bar{x}}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_w^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_l^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Prediksiyon için  $\mathbf{I}_k$  ölçüleri kullanılmaksızın durum kestirimi göz önüne alınır. Buna göre (3.2)'deki denklemlerin ilkinden  $\mathbf{x}_{k-1}$ 'in eşiti ikincisinde göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{T}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{T}_{k-1} \mathbf{v}_{\bar{x}_{k-1}} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (3.4)$$

çıkarak (2.1)'de  $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{0}$  kabul edilerek  $t_k$  zamanı için

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{T}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (3.5)$$

kestirimi elde edilir. Bu eşitlik (3.4)'de göz önüne alınırsa,

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - (\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{v}_{\bar{x}_{k-1}} + \mathbf{w}_{k-1}) \quad (3.6)$$

olur. Burada,

$$\mathbf{v}_{\bar{x}_k} = \mathbf{T}_{k-1} \mathbf{v}_{\bar{x}_{k-1}} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (3.7)$$

kestirim hatasıdır. Buna göre (3.6) eşitliği,

$$\bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{v}_{\bar{x}_k} = \mathbf{x}_k \quad (3.8)$$

olur.  $\bar{\mathbf{x}}_k$  vektörünün ağırlık katsayıları matrisi (3.7)'den,

$$\mathbf{Q}_{\bar{x}\bar{x}} = \mathbf{T} \mathbf{Q}_{\bar{x}\bar{x}} \mathbf{T}^T + \mathbf{Q}_{ww} \quad (3.9)$$

çıkarak .

(3.5) ve (3.9) eşitlikleri, Kalman filtresinin zaman-güncelleme (time-update or prediction) denklemlerini oluşturur.

(3.8) eşitliği,  $t_k$  zamanı için ilk ölçü grubu olarak düşünülür. İkinci ölçü grubu  $t_k$  zamanındaki ölçülerdir. Buna göre  $\mathbf{x}_{k-1}$  durum vektörünün yok edildiği (3.2) modeli

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\bar{x}} \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.10a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_I^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.10b)$$

olur [17,7]. (3.10) eşitliklerindeki tüm büyüklükler  $t_k$  zamanına ilişkindir. (3.10)'a Gauss-Markoff modelinde kestirim eşitlikleri [4,19] uygulanırsa  $t_k$  zamanındaki durum vektörü ve bunun kofaktör matrisi;

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_I \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_I \mathbf{l}) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_I \mathbf{A})^{-1} \quad (3.12)$$

elde edilir. Kuvvetlendirme (gain) matrisi

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{P}_I^{-1} + \mathbf{A} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \quad (3.13)$$

olmak üzere [8,11] (3.11) eşitliği

$$\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\mathbf{l} - \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.14)$$

olur [3,11,13].

(3.14) ve (3.12) eşitlikleri filtreleme denklemlerini oluştururlar. İki grup ölçünün art arda dengelenmesi sonunda da (3.14) ve (3.12) ile özdeş çözümler elde edilir [11].

Kalman filtresinin uygulanabilmesi için başlangıçta belli giriş bilgilerine;  $\mathbf{x}_0$  durum vektörü ve  $\mathbf{C}_{x_0x_0} = \sigma_0^2 \mathbf{P}_{x_0}^{-1}$  kovaryans matrisine gereksinim vardır. Durum vektörüne ilişkin bir bilgi yoksa başlangıç değeri olarak  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$  ve  $q$  artı işaretli büyük bir sayı olmak üzere

$$\mathbf{P}_{x_0} = \frac{1}{q} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{0} \quad (3.15)$$

öngörülür [15].

(3.14) filtreleme denklemiyle elde edilen  $\hat{\mathbf{x}}_k$  durum vektörünün iki terim toplamına eşit olduğu görülmektedir. Bunlardan ilki durum vektörünün (3.5) ile bulunan prediksyon değeridir. İkincisi ise güncel ölçüler vektörü ile bunun prediksyon değeri arasındaki farkı içermektedir :

$$\mathbf{d} = \mathbf{l} - \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} \quad (3.16)$$

Bu fark innovasyon (innovation) olarak adlandırılır [15]. Buna göre (3.14)'deki ikinci terim  $\mathbf{K}$  kuvvetlendirme matrisiyle çarpılmış innovasyondur (ölçülerin prediksyona etkisi). Bu eşitliğe hata yayılma kuralı uygulanırsa innovasyonun kofaktör matrisi,

$$\mathbf{Q}_{dd} = [\mathbf{Q}_{ll} + \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\bar{x}\bar{x}} \mathbf{A}^T] = \mathbf{D} \quad (3.17)$$

olur. (3.14) eşitliği (3.10) modelinde göz önüne alınırsa

$$\mathbf{v}_{\bar{x}} = \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{v}_l = \mathbf{A} (\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{d}) - \mathbf{l} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (3.19a)$$

ya da

$$\mathbf{v}_l = -\mathbf{Q}_{ll} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{d} \quad (3.19b)$$

düzeltilmeleri elde edilir. (3.18) ve (3.19) eşitliklerine hata yayılma kuralı uygulanır ve (3.17) göz önüne alınırsa düzeltmelerin kofaktör matrisi

$$\mathbf{Q}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{v_{\bar{x}}v_{\bar{x}}} & \mathbf{Q}_{v_{\bar{x}}v_l} \\ \mathbf{Q}_{v_l v_{\bar{x}}} & \mathbf{Q}_{v_l v_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^T & -\mathbf{K} \mathbf{Q}_{ll} \\ -\mathbf{Q}_{ll} \mathbf{K}^T & \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

çıkar [16,20].

Kalman filtrelemesi tekniğinde  $t_k$  periyoduna ilişkin ölçüler yardımıyla geriye dönük çözümlerle  $t_{k-1}$  periyodundaki bilinmeyenler de düzeltilmektedir. (3.2) modeline Gauss-Markoff kestirim eşitlikleri [4,19] uygulanırsa normal denklemler

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\bar{x}} + \mathbf{T}_{k-1}^T \mathbf{P}_w \mathbf{T}_{k-1} & -\mathbf{T}_{k-1}^T \mathbf{P}_w \\ -\mathbf{P}_w \mathbf{T}_{k-1} & \mathbf{P}_w + \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_l \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\bar{x}} \bar{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_l \mathbf{l}_k \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

elde edilir.

(3.21) eşitliği açılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa  $t_{k-1}$  zamanındaki  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  yumuşatılmış durum vektörü

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{P}_{\bar{x}}^{-1} \mathbf{T}_{k-1}^T \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_l (\mathbf{l}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (3.22)$$

ya da

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{P}_{\bar{x}}^{-1} \mathbf{T}_{k-1}^T \mathbf{P}_{\bar{x}} (\hat{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) \quad (3.23)$$

olur [14,19].



(3.22) eşitliğine hata yayılma kuralı uygulanır ve (3.12) eşitliği göz önüne alınırsa  $t_{k-1}$  zamanındaki  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  yumuşatılmış durum vektörü  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}, k-1}$  kofaktör matrisi,

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \mathbf{T}_{k-1}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}^{-1} \quad (3.24)$$

olmak üzere

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}, k-1} = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}, k} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}) \mathbf{J}^T \quad (3.25)$$

elde edilir [14,20]. Burada ki  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}}$  (3.9)'da verilmiştir.

#### 4. SONUÇ

Kalman filtreleme modeli, rasgele hatalar içeren dinamik bir sisteme uygulanan en uygun parametre kestirim işlemidir ve belirli zamanlarda elde edilen ölçüler yardımıyla bilinmeyen  $\mathbf{x}_k$  durum vektörünün minimum varyanslı en uygun doğrusal kestirimi için yinelemeli bir algoritma oluşturur.

Kalman filtreleme yöntemi prediksyon, filtreleme ve yumuşatma aşamalarından oluşmaktadır. Bir kinematik model ile birlikte geçmiş zamandaki konumlama bilgilerini temel alan prediksyon adımı bir sonraki ölçüm periyodu için beklenen konum koordinatları ve doğrulukları hesaplanır. Filtreleme adımı, klasik en küçük kareler yönteminin uygulanmasıdır. Yapılan en son ölçüm periyodu ve tamamlanan filtreleme adımı sonradan tüm ölçülerin yeniden işlendiği yumuşatma adımı gerçekleştirilir. Kalman filtresi en küçük kareler yöntemine göre dengelemenin özel bir biçimidir.

En küçük karelere göre dengelemenin yapılabilmesi için ölçü sayısının bilinmeyen parametre sayısından fazla olması gerekir. Kalman filtreleme yöntemiyle, ölçü sayısı bilinmeyen parametre sayısından daha az sayıda olsa dahi hareket parametreleri belirlenebilmektedir. Bu teknik, her türlü doğrusal ve doğrusal olmayan değişimlerin stokastik modellerinin iyi oluşturulması durumunda özellikle verilerin sürekli ve yoğun elde edildiği deformasyon araştırmaları için uygun bir yöntemdir.

#### 5. KAYNAKLAR

- [1] Brammer ve Siffing, "Kalman-Bucy-Filter, Deterministische Beobachtung und Stochastische Filterung", R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1975.
- [2] Chui, C.K. ve Chen, G., "Kalman Filtering with Real-Time Applications", Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [3] Cross, P.A., "Advanced Least Squares Applied to Position-Fixing", Working Paper No.6, Polytechnic of East London Department of Land Surveying, 1990.
- [4] Demirel, H., "Hata Kuramı ve Parametre Kestirimi", YTÜ, Jeodezi ve Fotogrametri Müh.Bölümü, Ders notu, 1999.

- [5] Gross, R.S.; Eubanks, T.M., et al., "A Kalman-Filter Based Approach to Combining Independent Earth Orientation Series", *Journal of Geodesy* 72, pp 215-235, 1998.
- [6] Haykin, S., "Adaptive Filter Theory", Printice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.
- [7] Heunecke, O., "Deformationsanalyse Mittels Kalman-Filter Möglichkeiten und Perspektiven", FIG XX. International Congress, Melbourne, Australia, 1994.
- [8] Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H. ve Collins, J., "Global Positionin System-Theory and Practice", SpringerWien-NewYork, 1987.
- [9] Kalman, R.E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *Journal of Basic Engineering*, Vol. 83D, 95-108, 1960.
- [10] Krakiwsky, E.J., "A Synthesis of Recent Advances in the Methodof Least Squares", *Lecture Notes No.42*, University of New Brunswick, 1975.
- [11] Koch, K.R., "Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models", 2 nd Edition, Springer Verlag, 1999.
- [12] Liu, Z.W.; Krakiwsky, E.J. ve Gao, Y., "An Analysis of Three Methods for Filtering a Correlated Measurement Sequence", *Manuscripta Geodaetica* 17, pp 87-95, 1992.
- [13] Leick, A. "GPS Satellite Surveying, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sohn, 1995.
- [14] Merminod, B., "The Use of Kalman Filters in GPS Navigation", *Unisurv S-35*, Reports from School of Surveying, The University of New South Wales, Kensington, Australia, 1989.
- [15] Pelzer, H., "Statische, Kinematische und Dynamische Punktfelder" In: Pelzer (Hrsg.): *Geodatische Netze in Landes-und Ingenieurvermessung II*, Wittwer-Verlag, s.225-262, Stuttgart, 1985.
- [16] Pelzer, H., "Deformationsuntersuchungen auf der Basis Kinematischer Bewegungsmodelle", *AVN*, Heft 2, pp.49-62,1987.
- [17] Pelzer, H., "Anwendung der Kalman Filtertechnik auf die Deformationanalyse", *X. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung*, Kap. B4, Bonn, 1988.
- [18] Salychev, O. ve Schaffrin, B., "New Filter Approaches for GPS/INS Integration", *Proceedings of the International Geodetic Symposium on Satellite Positioning*, 1992.
- [19] Salzmann, M., "Least Squares Filtering and Testing for Geodetic Navigation Applications", *Netherlands Geodetic Commission, Publication on Geodesy*, Number 37, 1993.
- [20] Unterberg, U., "Das Kalman-Filter als Ansatz für die Auswertung Weitraumiger Kinematischer Höhennetze", *Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universitat Hannover*, No.170, Hannover, 1991.