

ARAŞTIRMA MAKALESİ

**GPS İLE YÜKSEKLİK BELİRLEMEDE İNTERPOLASYON YÖNTEMLERİNE  
AİT BİR UYGULAMA**

**Aysel KARTAL**

*Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, Jeodezi ve Fotogrametri Müh. Bölümü*

**Geliş Tarihi:21.04.2000**

**DETERMINATION OF ORTHOMETRIC HEIGHTS USING GPS AND A APPLICATION OF THE  
INTERPOLATION METHODS**

**ABSTRACT**

It's possible to determine three dimensional absolute position with GPS anywhere on the earth. Third dimension is height. Although the method of GPS positioning yields 3d coordinates, heights directly derived from 3d coordinates cannot be used like conventional heights derived from leveling. GPS heights refer to an elipsoid and not to the geoid as conventional heights do. So that reason, a lot of method has been developed.

The aim of this work, determination of geoid heights with different methods and determination of orthometric heights with GPS data.

**ÖZET**

GPS ile üç boyutlu konum bilgileri elde edilmektedir. Bunların içinde üçüncü boyut yüksekliktir. GPS ile elde edilen yükseklikler elipsoidal yüksekliklerdir. Bunun yanında genellikle jeodezik uygulamalarda elipsoidal yükseklik yerine, ortometrik yükseklik kullanılır. Bu yüzden GPS ile elde edilen elipsoidal yükseklikler ile pratikte kullanılan ortometrik yükseklikler arasında bir bağlantı kurmak gerekir. Hesaplanacak ortometrik yüksekliğin doğruluğu, N değerinin ve GPS ile elde edilen elipsoidal yüksekliğin doğruluğuna bağlı olarak değişir. Bu sorunu çözmek için birçok yöntem geliştirilmiş, yöntemler elde edilen veriler ve beklenen duyarlılığa göre kullanım alanları bulmuşlardır. Bu çalışmada jeoit belirleme yöntemleri üzerinde durulmuş ve topografik yapıları birbirlerinden farklı olan iki bölge alınarak , bu bölgeler için kullanılan yüzey belirleme yöntemleri incelenmiştir. GPS yöntemiyle koordinatlandırılmış ve geometrik nivelmanla ortometrik yükseklikleri bulunmuş dayanak noktaları kullanılarak, iki ayrı interpolasyon yöntemiyle uygulama alanına ait diğer noktaların jeoit yüksekliklerinin hesaplanması amaçlanmıştır. Her iki uygulama alanında da kayan yüzey yardımıyla interpolasyon yöntemi kullanılarak yapılan hesaplarda dayanak noktası sayısı artırıldıkça kesin değer olarak alınan proje değerlerine yaklaşıldığı ancak bölgeyi sınırlayan bazı uç noktalarda bu değerlerden büyük sapmalar olduğu görülmüştür. Çalışılan bölgeye ait yeterli miktarda (yaklaşık olarak 5 km'de bir) ortometrik yüksekliği ve konumu bilinen dayanak noktası mevcut ise GPS'ten elde edilen yüksekliklerden yararlanarak diğer tüm noktaların ortometrik yükseklikleri interpolasyon yöntemlerinde birisiyle dm mertebesinde doğrulukla belirlenebilmektedir.

**1. GİRİŞ**

Yükseklik yeryüzündeki geometrik cisimlerin üçüncü boyutudur. Bir noktanın yüksekliği, noktadan sıfır yükselteli başlangıç yüzeyine inilen dikin boyudur. Noktanın yüksekliğini saptayabilmek için ilk olarak başlangıç yüzeyinin tanımlanması ve buna dik doğruların belirlenmesi gerekir. Yeryüzü noktaları için en kolay belirlenebilen doğrultular çekül doğrultularıdır. Bunun için yükseklik belirlemede bu doğrultuların alınması en kolay

yoldur. Bu doğrultulara dik sıfır yükselteli yüzey ise jeoit yüzeyidir. Jeoitin belirlenmesi de jeodezinin temel görevlerinden birisidir (Ayan,1978).

1970'li yıllardan başlayarak günümüze kadar hızlı bir gelişme gösteren GPS (Global Positioning System), jeodezik çalışmalarda çok uzun zamandan beri kullanılmakta olan klasik ölçme yöntemlerinden kaynaklanan problemlerin aşılmasında oldukça önemli rol oynamıştır. Bugün ulaştığı teknik imkanlarla GPS alıcısına sahip olan her kullanıcı gerektiğinde hassas bir şekilde, üç boyutlu olarak konum bilgilerini elde edebilmektedir.

Yöntemin temel ilkesi, uzayda değişik yörüngelerde bulunan en az 4 uyduya mesafe ölçümü yaparak alıcının üç boyutlu koordinatlarının hesaplanmasıdır. Burada uydular, koordinatları bilinen noktalar olarak kabul edilirse, işlem en basit anlamda bir uzay geriden kestirme yöntemidir.

Uydu ile alıcı arasındaki uzaklık ( $\rho_i^j$ ), uydu koordinatları ( $x_j, y_j, z_j$ ), alıcı koordinatları ( $X_i, Y_i, Z_i$ ) olarak alındığında;

$$\rho_i^j = \sqrt{(X_i - x_j)^2 + (Y_i - y_j)^2 + (Z_i - z_j)^2} \quad (1)$$

şeklinde dir.

GPS verilerinin değerlendirilmesi ile elde edilen yükseklikler elipsoidal yüksekliklerdir. Bunun yanında genellikle pratik uygulamalarda elipsoidal yükseklik kullanılmaz, bunun yerine ortometrik yükseklik kullanılır. Bu yüzden GPS ile elde edilen elipsoidal yükseklikler ile ortometrik yükseklikler arasında ilişki kurulmalıdır. GPS ile koordinatlandırılmış üç boyutlu konum ağları geometrik bir sistem olmasına karşılık mevcut yükseklik ağları düşey boyutun jeopotansiyel ile ifade edildiği tek bileşenli fiziksel bir sistemdir. İki sistemi ilişkilendirmekteki asıl amaç, GPS ölçülerine göre daha yorucu olan ve zaman alan nivelman işlemini azaltarak GPS ile sorunu çözmektir. Bunun için dm'nin altında bir doğrulukla jeoitin belirlenmesi gerekir(Aksoy vd.,1998). Jeoit belirlenmiş ise elipsoidal yükseklik ( $h$ ) ile ortometrik yükseklik ( $H$ ) arasındaki ilişki,

$$H = h - N \quad (2)$$

şeklinde dir. Bu eşitlikte  $N$  jeoit yüksekliğidir. GPS verilerinden yararlanarak yükseklik belirlemenin temelini veren bu basit eşitlik ile,  $N$  değeri bilinen ve  $h$  değeri GPS gözlemleriyle saptanmış olan noktanın ortometrik yüksekliği hesaplanabilir. Hesaplanacak ortometrik yüksekliğin doğruluğu,  $N$  değerinin ve GPS ile elde edilen elipsoidal yüksekliğin doğruluğuna bağlı olarak değişir.

## 2. JEOİT YÜKSEKLİĞİ BELİRLENMESİNDE KULLANILAN MATEMATİKSEL MODELLER

Jeoit ile elipsoid yüzeyi arasındaki uzaklığa jeoit ondülasyonu veya jeoit yüksekliği adı verilir. Yeryüzünü oluşturan tabakaların yoğunluklarının farklı olmasından dolayı jeoit düzensiz bir şekle sahiptir. Jeoit yüksekliği değerleri ortalama yer elipsoidine göre  $\pm 100$  m arasında değişir.

Jeoit belirleme yöntemlerini jeoitin kapsadığı alana göre ve kullanılan verilere göre iki grupta incelemek mümkündür: Jeoitin kapsadığı alana göre global, bölgesel ve yerel jeoit belirleme söz konusudur. İkinci grupta yer alan veriler çekül sapmaları, nokta gravite ölçüleri, GPS/Nivelman, GPS/Astronomik gözlemleri ve uydu ile yersel verilerin kombinasyonudur.

### 2.1 Global Jeoit Belirleme Modelleri

Global jeoit modelleri, isminden de anlaşıldığı üzere tüm dünyaya ait gravite bilgilerinden faydalanarak oluşturulmuş bir modeldir. Her ulusun bir ya da birkaç istasyonu dünya çapındaki gravite baz istasyonları ağını oluşturur (Heiskanen vd.,1967). IGSN71(International Gravity Standardization Net 1971) datumu, 1906'da yapılan sarkaç ölçüleri ile belirlenen Potsdam sisteminin yerini almış ve gravite ölçüleri için referans olarak kabul edilmiştir (Gravity and Magnetism Terms for the 4th Edition of the SEG encyclopedic dictionary).

Son yıllarda dünya gravite alanının saptanması işlemi uydu ve yüzey gravite bilgilerinin kombinasyonu ile gerçekleştirilmektedir (Rapp,1992).

1849'da Stokes'in, gravite ölçülerini kullanarak jeoit yüksekliği hesaplamaya yönelik olarak bulduğu eşitlik aşağıdaki gibidir.

$$N = \frac{R}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (3)$$

R : Dünyanın yarıçapı

G : Ortalama gravite

$\Delta g$  : Serbest hava gravite anomalisi

S ( $\psi$ ) : Stokes fonksiyonu

Stokes formülü , jeoitin dış tarafında kitle olmadığı ön kabulüne dayanır. Eğer herhangi bir fiziksel jeodezi problemi, potansiyel kuramının belirlediği anlamda bir sınır değeri problemi olarak ele alınmak istenirse, sınırlayan yüzeyin dışında kitle yoktur diyen bu kabul zorunludur. Bunun nedeni, potansiyel kuramının sınır değeri problemlerinin daima harmonik fonksiyonları içermesidir. Jeoitin dış tarafında kitleler varolduğundan Stokes integrali ya da ilgili formüllerin uygulanabilmesinden önce bu kitlelerin jeoitin içine götürülmesi ya da tümüyle ortadan kaldırılması zorunludur. Türlü gravite indirgemelerinin amacı budur.

Global jeoit modellerine örnek olarak potansiyel katsayılardan yararlanarak jeoit yüksekliği hesaplama ilkesine dayanan OSU91-A ve EGM 96 modelleri verilebilir.

### 2.1.1 OSU91-A ( Ohio State University Global Geoid Model 91 A ) Modeli

OSU91-A modeli 360 dereceye kadar küresel harmoniklerin kullanımını içerir. OSU91A jeopotansiyel modeli 50. dereceye kadar GEOSAT uydularının bir yıllık altimetre verileri, GEM-T2 jeopotansiyel model katsayıları ve 30' x 30' lık gravite anomalilerinin kombinasyonu ile dengelenmiş anomaliler yardımıyla hesaplanmıştır. Katsayı adedi 130682'dir (Ollikainen,1997).

Küresel harmonik açılım ve OSU91 katsayılarının kullanımı ile jeoit ondülasyonları mutlak olarak 1-2 m duyarlıkta elde edilmektedir. Kısa mesafelerde göreceli duyarlık dm mertebesinde dir. OSU91-A jeopotansiyel modeli ile 50x50 km'lik bir alanda jeoit yüksekliği belirlenmesinde elde edilebilecek global hassasiyet ortalama 57 cm'dir. Bu hassasiyet bölgeden bölgeye değişiklik gösteren datalar ile bu modelin teknolojik yenilikler çerçevesinde geliştirilmesine bağlıdır (Zhiheng vd.,1996).

Yüzey gravite bilgilerine bağlı olarak OSU91-A modeli ile elde edilen jeoit ondülasyonları şu şekilde sıralanabilir :

- Okyanus alanlarında → ± 26 cm
- Yeterli yüzey gravite bilgilerine sahip kara alanları → ± 38 cm
- Yetersiz yüzey gravite bilgilerine sahip kara alanları → ± 56 cm
- Hiç yüzey gravite bilgisi olmayan alanlar → ± 200 cm

Bu model ile maksimum çözüme, 30' x 30' ortalama gravite anomalilerinin bulunduğu alanlarda ulaşılır (Rapp, 1992).

### 2.1.2 EGM 96 ( Earth Geopotential Model 1996 ) Modeli

Bu model DMA ( U.S Defence Mapping Agency ), NIMA ( National Imaginery and Mapping Agency ), GSFC ( NASA Goddard Space Flight Centre ) ve Ohio State Üniversitesi tarafından geliştirilmiştir. Son versiyonu 24 Eylül 1996 tarihinde çıkarılmış olup, son versiyon kullanılmaya başlanmadan önce 5 modeli içeren geniş bir test yapılmıştır. Son yapılan çalışmalarla global jeoit modelinin doğruluğu ± 0.5 – 1.0 m'ye , küresel harmonik modelin derecesi ve sırası 360'a geliştirilmiştir (Ollikainen,1997).

### 2.2 Bölgesel Jeoit Belirleme Modelleri

Bölgesel jeoit modellerinin gravimetrik olarak hesaplanması işlemi Stokes integraline dayanır:

$$N = N_{GM} + \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} (\Delta g - \Delta g_{GM}) S(\psi) d\sigma \quad (4)$$

#### 2.2.1 Gravimetrik Yöntemler İle Jeoit Yüksekliği Belirleme

Gravimetrik yöntemler, bir sınır yüzey için verilen gravite anomalileriyle bu yüzeye bağlı jeoit yükseklikleri ya da yükseklik anomalileri arasındaki ilişkiyi tanımlayan jeodezik sınır değer probleminin çözümünü temeline dayanır. Sınır değer probleminin çözümü Stokes entegrali ile sağlanır. Stokes entegrali,

- klasik
- hızlı Fourier
- vb. tekniklerle çözülebilir.

#### a) Klasik ve Hızlı Fourier Tekniği ile Stokes İntegrasyonu

Jeoit yüksekliğinin hassas bir şekilde belirlenebilmesi için; jeopotansiyel model(GM), ortalama serbest hava gravite anomalileri( $\Delta g_{FA}$ ) ve sayısal arazi modeli yükseklikleri (h) kombinasyonundan yararlanır. Bu data tiplerinin kullanımıyla elde edilen eşitlikler şöyledir :

$$N = N_{GM} + N_{Ag} + N_h \quad (5)$$

$$\Delta g = \Delta g_{FA} - \Delta g_{GM} - \Delta g_h \quad (6)$$

$N_{GM}$  100 km'den büyük uzunluklarda oldukça düzgün değişim gösteren jeoitin uzun dalga boyu özelliğini temsil eder.  $N_{Ag}$  20 ila 200 km arasında dalga boyuna sahip bölgesel veya lokal jeoit özelliği iken,  $N_h$  hızlı fakat küçük değişim gösteren 20 km'nin

altında, topografyadan kaynaklanan dalga boyu özelliğini ifade eder. Farklı dalga boyu  $N_{GM}$ ,  $N_{\Delta g}$ ,  $N_h$  büyüklükleri genel anlamda gravimetrik yöntemler yardımıyla jeoit belirlemenin konusudur. Hızlı Fourier dönüşümü, kolokasyon ya da her ikisinin kombinasyonu yöntemleri arasındaki fark, yalnızca jeoit yüksekliği içindeki  $N_{\Delta g}$  payının hesabında ortaya çıkar.

Düzlem yaklaşımda E bir integrasyon alanı ve  $\gamma$  ortalama gravite olmak üzere jeoit yükseklikleri aşağıdaki eşitlik ile hesaplanır:

$$N_{\Delta g}(x_p, y_p) = \mathbf{S}\Delta g = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \frac{\Delta g(x, y)}{\ell} dx dy \quad (7)$$

Yukarıdaki eşitlikte  $\ell$  değeri, data noktaları  $(x, y)$  ile hesaplanan noktalar  $(x_p, y_p)$  arasındaki uzunluktur.  $\mathbf{S}$  Stokes operatörünü ifade eder. Küresel yaklaşımda ise bu değer,

$$N_{\Delta g}(\varphi_p, \lambda_p) = \mathbf{S}\Delta g = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g(\varphi, \lambda) S(\psi) d\sigma \quad (8)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır. R ortalama Dünya yarıçapını,  $S(\psi)$  Stokes fonksiyonunu,  $\psi$  küresel mesafeyi ifade eder.

Yukarıdaki eşitlikler iki boyutlu eğri integralleridir. Hızlı Fourier tekniğinin kullanımıyla bu integraller etkin bir biçimde değerlendirilebilir (Schwarz vd., 1985).

#### b) En Küçük Karelerle Kolokasyon Yöntemi

En küçük karelerle kolokasyon yöntemi, çok zaman isteyen, kovaryans fonksiyonları için fazladan ön inceleme gerektiren, gravite alanına ait değişik kaynaklardan elde edilen verilerin birlikte kullanımına imkan veren bir yöntemdir. Diğer yöntemler bu önemli avantaja sahip değildir. Bu yöntemde jeoit yüksekliği üç parça şeklinde incelenebilir:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 \quad (9)$$

$N_1$  : Gravite alanına ait toplam spektrumun uzun dalga boylu sinyalleri  
 $N_2$  : Gravite alanına ait toplam spektrumun orta dalga boylu sinyalleri  
 $N_3$  : Gravite alanına ait toplam spektrumun kısa dalga boylu sinyalleri

Benzer olarak jeoit yükseklikleri farkları ;

$$\Delta N = \Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3 \quad (10)$$

şeklinde yazılabilir.

Jeoit yüksekliğine ait uzun dalga boylu sinyaller ( $N_1$ ) belirli bir dereceye kadar olan katsayıların oluşturduğu jeopotansiyel modelin sonlu küresel harmoniklerde kullanımını ile elde edilebilir ( $l_{max}$ ).

$$N_1 = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{l=2}^{l_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (\Delta C_l m \cos m\lambda + \Delta S_l m \sin m\lambda) P_l^m(\cos \theta) \quad (11)$$

Bu eşitlikte ;

GM : Yer kitesine ait sabit Newton çekim kuvveti

$\gamma$  : Normal gravite

$\Delta C$ ,  $\Delta S$  : Jeopotansiyel modelin küresel harmonik katsayıları

$\theta$ ,  $\lambda$  : Kutup mesafesi ve jeosentrik boylam

$P_{lm}(\cdot)$  : Legendre fonksiyonları  
 $a$  : Elipsoidin yarı büyük eksen  
 $r$  : Yer vektörünün boyu

anlamındadır.

(9) eşitliğindeki  $N_3$  değeri, toplam spektrumun kısa dalga boylu sinyalleri ile üretilir.  $N_3$  sayısal arazi modelinden de elde edilebilir. Bu en uygun şekilde 15'x15' veya 30'x30' ortalama yükseklikleri içeren ortalama yükseklik yüzeyinden elde edilecek topografya değişikliklerinin saptanması ile yapılır. Sabit arazi modeli indirgemesinin sadece sınırlı bir alan için yükseklik bilgileri gerektirmesi ve jeoit üzerindeki dolaylı etkilerin oldukça küçük olması gibi bazı avantajları vardır.

### c) Kolokasyon ve İntegrasyon Metodlarının Kombinasyonu Modeli

Bu methodda  $s = C_{sx} C_{xx}^{-1} x$  eşitliğinden hesaplanan nokta etrafındaki küçük bölgede  $N_{\Delta g}$ 'nin tahmini için kullanılır ve ayrıca geri kalan bölgede küresel yaklaşımda Stokes eşitliğinden yararlanır:

$$N_{\Delta g} = \frac{R}{4\pi g_o} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta(\psi, \alpha) S(\psi) \sin\psi \, d\psi \, d\alpha \quad (12)$$

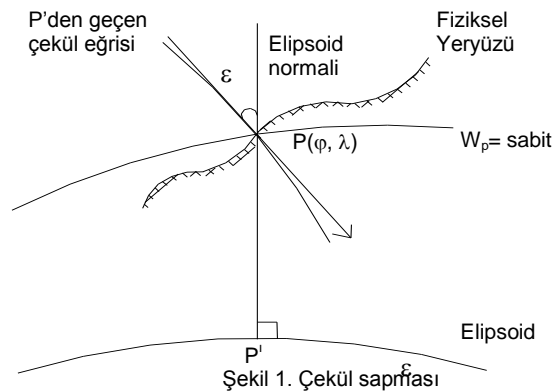
Burada:

$S(\psi)$  : Stokes fonksiyonu  
 $\psi$  : küresel mesafe  
 $\alpha$  :  $\psi$ 'nin jeodezik azimutu  
 $R$ : Dünya'nın ortalama yarıçapıdır.

Bu yöntem nokta bilgileri ile kullanılmasına karşın, uygulamalarda hesaplama zamanının azaltılması için ortalama  $\Delta g$  değerleri de kullanılmaktadır(Schwarz vd.,1985).

### 2.3 Astrojeodezik Yöntem İle Jeoit Yüksekliği Belirleme

Fiziksel yeryüzündeki bir P noktasından geçen çekül eğrisi ile yine aynı noktadan geçen elipsoid normali  $\varepsilon$  kadar birbirlerinden saparlar (Şekil 1)



Bu farka **çekül sapması** denir ve

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (13)$$

eşitliği ile ifade edilir.

$\alpha$  : Kesit boyunca azimut

$\xi, \eta$  : Astrojeodezik çekül sapmasının Kuzey – Güney ve Doğu – Batı bileşenleridir.

Astrojeodezik jeoit belirleme yönteminde çekül sapması bileşenleri, aynı noktaya ait jeodezik ve astronomik koordinatların karşılaştırılması ile elde edilir. Bu işlemde  $\varphi, \lambda$  jeodezik enlem ve boylam;  $\phi, \Lambda$  astronomik enlem ve boylam olmak üzere şu eşitlikler kullanılır:

$$\xi = \phi - \varphi \quad (14)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \quad (15)$$

Başlangıç noktası A'da jeoit yüksekliği biliniyor ise ( $N_A$ ) AB profili boyunca N değeri

$$N = N_A - \int_A^B \varepsilon ds \quad (16)$$

eşitliğiyle hesaplanır.

Bu eşitlik astrojeodezik nivelman eşitliğidir. Jeoit hesaplamalarında bu eşitliğe ortometrik düzeltme getirilmeli ya da yeryüzü için geçerli olan (14) ve (15) eşitlikleriyle hesaplanan çekül sapması bileşenleri ile  $\alpha$  azimutundaki çekül sapması jeoitte indirgenmelidir. N konuma bağlı bir fonksiyondur ve bu integral A ile B noktalarını bağlayan yoldan bağımsızdır. Bu yolun elipsoit yüzünde bir jeodezik eğri olması gerekmez. Çekül sapması bileşenleri profil boyunca bulunan istasyonlar arasında güvenilir enterpolasyon yapmaya elverişli sıklıkta olmalıdır (Heiskanen ve Moritz, 1967). Gözlem istasyonları arasındaki N değerlerinin enterpolasyonu esnasında gözlem noktalarının topografyayı yansıtacak yerlerde yani hem tepelerde hem de vadilerde bulunmamasından kaynaklanan sorunlar ile karşılaşılabilir. Yapılan çalışmalar neticesinde gözlem noktalarının birbirlerine 60 km'den daha yakın olduğu durumlarda enterpolasyonun başarılı sonuçlar verdiği görülmüştür. Ağdaki birbirlerine uzak istasyonlardan ise kaba sonuçlar elde edilmektedir (Ollikainen, 1997).

Günümüzde astrojeodezik yöntemle jeoit belirleme yöntemi klasik astrojeodezik yöntemlere göre daha güvenilir görülebilir. Çünkü jeodezik enlem ve boylamın ( $\varphi, \lambda$ ) belirlenmesi GPS yöntemi ile kolayca yapılabilir. Bununla beraber astronomik enlem ve boylam değerlerinin doğru olarak belirlenmesi için pratik yöntemler geliştirilmiştir. 2 saatlik gözlemlerle 0.2 lik doğruluklar elde edilmektedir.

## 2.4 GPS/NİVELMAN Yöntemiyle Elde Edilen Verilerden Yararlanarak, Analitik Bir Yüzey Geçirerek Geometrik Olarak Jeoit Yüksekliği Belirleme

Elipsoidal yüksekliklerin ve ortometrik yüksekliklerin her ikisinin de bilindiği noktaların mevcut olduğu durumlarda, GPS/NİVELMAN jeoitini belirlenirken yükseklik eğrili haritaların yapımı için bu noktalardan bir yüzey geçirilir. Yüzey geçirilmesiyle elde edilen model, ara noktaların jeoit yüksekliklerinin belirlenmesinde de kullanılır. Ara noktaların elipsoidal yükseklikleri GPS ile bulunur. Modelle ortometrik yükseklik elde edilir.

Bu işlem astrojeodezik yöntemle benzer. Her iki yöntemde de gözlemden kaynaklanan hatalar dışında en yüksek hassasiyet, jeoitin düzgün olduğu alanda

bulunan birbirine 3-5 km istasyonlar arasında yapılan uygulamalarda elde edilir (King vd.,1985).

#### 2.4.1 Polinomlar İle Yüzey Oluşturma

$$N(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad (17)$$

eşitliği genel yüzey eşitliğidir. n sayısı 1 ise geçirilen yüzey bi-lineer, 2 ise bi-kvadratik ve 3 olduğunda bi-kübik spline adını almaktadır. Bi-lineer yüzeyde ortak nokta sayısı (elipsoit ve ortometrik yüksekliği belli) en az 4, bi-kvadratik yüzeyde en az 9 ve bi-kübik spline yüzeyde en az 16 olmalıdır. Ortak nokta sayısının bu değerlerden fazla olması durumunda yüzeyi belirleyen parametreler en küçük kareler yöntemine göre dengeleme ile hesaplanır. Üstteki eşitlikteki  $a_i$  değeri spline katsayısını, x ve y değerleri sözkonusu noktanın Gauss koordinatlarını ifade eder (İnal, 1996). Polinomun derecesi dayanak nokta sayısına bağlı olarak belirlenir. En yüksek dereceden başlayarak bulunan katsayıların istatik testlerle signifikant olup olmadıkları belirlenerek kesin sonuç bulunur. Derece önceden belirlenemez. Derece; nokta sayısı, doğruluk, jeoitin özelliğine bağlı olarak oluşur.

#### 2.4.2 İnterpolasyon Yöntemleri

Arazi üzerinde dağılmış, koordinatları (x, y, z) bilinen noktalara "Dayanak Noktaları" adı verilir. Belirtilen arazinin bulunduğu koordinat sisteminin yatay düzleminde düzgün ve yeter sıklıkta bir ağ oluşturulur. Dayanak noktaları bu ağın içinde ve dışında dağılmış durumdadırlar. Daha sonra ağın köşe noktalarının yükseklikleri çeşitli interpolasyon yöntemlerinin herhangi birinden yararlanılarak hesaplanır. Böylelikle arazi sayısal olarak belirlenmiş olur.

İnterpolasyon n boyutlu  $P_i$  noktalarındaki m boyutlu vektörleri kullanarak n boyutlu  $P_k$  noktalarındaki m boyutlu bilinmeyen vektörlerinin hesaplanması işlemidir. n boyutlu  $P_i$  noktalarına dayanak uzayı adı verilir. Sayısal arazi modellerinin interpolasyonu probleminde dayanak uzayının iki boyutu (x, y), vektörlerin bir boyutu (z) vardır (Radwan vd., 1977).

Uygulamada en küçük parçalardaki polinomlarla interpolasyon ve kayan yüzey yardımıyla interpolasyon yöntemleri kullanıldığından yalnızca bu iki interpolasyon yöntemi irdelenecektir.

##### 2.4.2.1 En Küçük Parçalardaki Polinomlarla İnterpolasyon

Bu yöntemin en genel karakteri, her bir yerel yüzeyin aynı anda hesaplanmasıdır. Dayanak noktaları düzlemi eşit kare veya dikdörtgen parçası üzerindeki yüzeyler tüm bölgede sürekli ve düzgün olacak biçimde düşük dereceden polinomlarla gösterilir.

Eşit kare parçalarındaki yerel polinomlar;

$$Z = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad (18)$$

şekindedir.



Her bir kare bölgesindeki yüzey üstteki eşitlik şeklindeki yüzey fonksiyonu ile gösterilir. Birim karelerin her noktasında yüksekliğe ek olarak y ve x eksenleri doğrultusundaki eğimler de hesaplandığından her bir kare bölgesi için 12 değer bulunmuş olur.

Bu değerlerle 12 katsayılı,

$$Z = a_{00} + a_{01}y + a_{02}y^2 + a_{03}y^3 + a_{10}x + a_{11}xy + a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3 + a_{20}x^2 + a_{21}x^2y + a_{30}x^3 + a_{31}x^3y \quad (19)$$

şeklinde bikübik bir polinom belirlenebilir. Bu polinom birim karenin köşe noktalarındaki yükseklikler veya eğimlerden hesaplandığından komşu karelerdeki polinomların fonksiyon değerleri sınırlar boyunca aynı olur (Güler, 1978).

#### 2.4.2.2 Kayan Yüzey Yardımı İle İnterpolasyon

İstenilen bir noktanın yüksekliği çevresinde bulunan dayanak noktalarından hesaplanan bir yüzeyden elde edilir. Bu yüzeyin konum ve şekli, bir noktadan diğer bir komşu noktaya değiştiğinden "Kayan Yüzey" olarak tanımlanır. Koordinat sisteminin başlangıcı olarak yüksekliği hesaplanacak nokta alınır, bu yüzeye ait,

$$Z = \sum_{i=0}^m \sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j \quad (20)$$

m'nci dereceden polinomun sabit terimi  $a_{00}$  interpole edilecek noktanın yükseklik değeri olur.

(20) eşitliğindeki  $a_{ij}$ , katsayıları, m yüzeyin derecesini göstermektedir. Yüzeyin  $a_{ij}$  katsayılarının hesabı için hata denklemleri ,

$$v_i = \sum_{k=0}^m \sum_{i+j=k} a_{ij} x_n^i y_n^j - Z_n \quad (21)$$

şekindedir. Burada  $x_n$ ,  $y_n$ , n'nci dayanak noktasının koordinatlarını,  $x_0$  ve  $y_0$  yüksekliği hesaplanacak olan noktanın koordinatları,  $Z_n$  n'nci dayanak noktasının yüksekliğini ifade etmektedir. Ağırlık olarak,

$$w_n = ( (x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 )^{-k} \quad (22)$$

eşitliği kullanılır. Burada n indisi dayanak noktalarını, o indisi interpole edilecek noktayı göstermektedir.

Hata denklemleri matris gösterimi ile,

$$v = AX - L \quad (23)$$

şekindedir. Burada  $A$ ,  $x_n$  ve  $y_n$  koordinatlarını içeren katsayılar matrisi  $X$ ,  $a_{ij}$  katsayılarını içeren bilinmeyenler vektörü  $L$  ise, dayanak noktalarının  $Z_n$  yükseklik değerlerini içeren ölçüler vektörüdür. Buradan,

$$A^T Q A X - A^T Q L = 0 \quad (24)$$

olarak elde edilen normal denklemlerden,  $a_{ij}$  katsayılarını içeren  $\underline{X}$  bilinmeyenler vektörü ,

$$\underline{X} = (\underline{A}^T \underline{QA})^{-1} \underline{A}^T \underline{QL} \quad (25)$$

eşitliği ile hesaplanır (Güler, 1978).

### 2.5 Sonlu Elemanlarla Jeoit Yüksekliği Belirleme

Son yıllarda özellikle Avrupa'da kullanılan, uygulama olanağı oldukça fazla olan bir yöntemdir. Sonlu elemanlar yöntemi; sürekli bir sistemi problemin karakterine uygun sonlu elemanlara ayırarak daha sonra bu elemanların birleştirilmesi tarzında bir uygulama getirir. Jeoit yüksekliği belirlenecek alan parçalara ayrılarak, bu parçalarda interpolasyon yapılır ve komşu parçaları birleştiren düğüm noktalarında süreklilik sağlanır. Sonlu eleman ağının parçalarına ait düğüm noktaları, jeodezik ağın noktalarından farklı olabilir.

### 3. UYGULAMA

Bu çalışmada Ankara ve Bursa jeodezik ağına ait elipsoidal yükseklikleri GPS ile, ortometrik yükseklikleri geometrik nivelman ile belirlenmiş dayanak noktaları kullanılmıştır. Bu noktalar yardımı ile interpolasyon yöntemleri kullanılarak jeoit yüksekliği belirleme konusu irdelenmiştir.

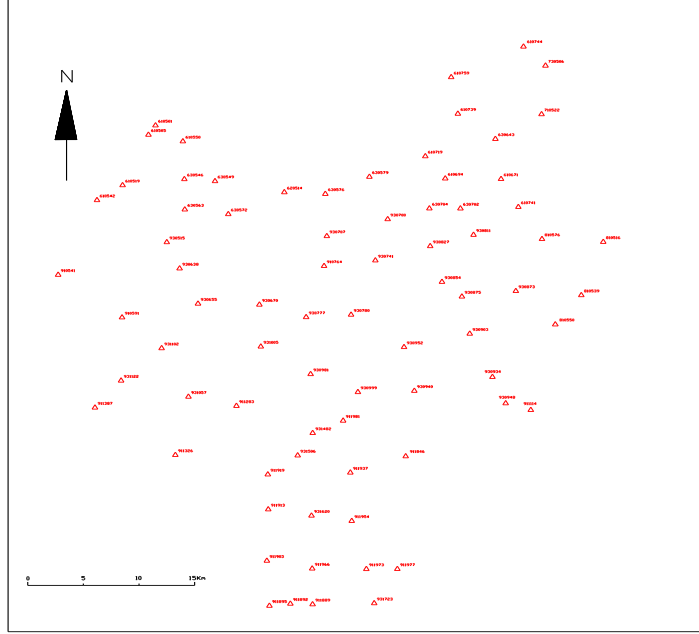
Ele alınan yöntemlerin sayısal uygulamalarında, Ankara ve Bursa Su ve Kanalizasyon İdareleri (ASKİ – BUSKİ) tarafından ihale edilen sayısal harita üretimi çalışması bünyesinde jeodezik kontrol ağlarının GPS teknolojisi ile sıklaştırılması ve güncelleştirilmesi projeleri verilerinden yararlanılmıştır.

Hesaplama işleminde kayan yüzey yardımıyla interpolasyon ile en küçük parçalardaki polinomlarla interpolasyon yöntemleri kullanılmış ve jeoitin farklılık gösterdiği iki bölgeye ait veriler değerlendirilmiştir.

#### 3.1 Ankara Jeodezik Ağındaki Uygulama

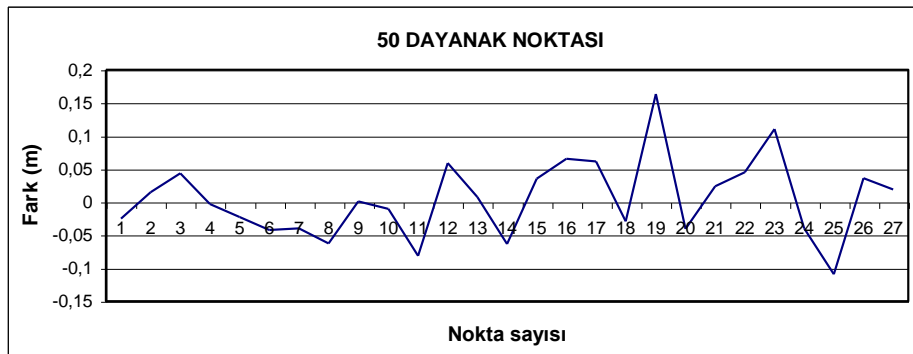
Ankara jeodezik ağı alanı yaklaşık 45 x 55 km<sup>2</sup>'lik bir alanı kapsamaktadır. Ağın tesisindeki asıl amaç, fotogrametrik harita yapımında yer kontrolünü oluşturmak ve bundan sonraki harita çalışmalarına temel altlık teşkil etmektir.

Uygulamada Ankara'ya ait 79 elipsoidal ve ortometrik yüksekliği bilinen, konumları hesaplanmış nokta kullanılmıştır (Şekil 3). Bu 79 nokta içerisinde değişik sayıda nokta seçilerek bu seçilen noktaların haricindeki noktaların ortometrik yükseklikleri bilinmeyen olarak kabul edilmiştir. Kayan yüzey yardımıyla interpolasyon ve en küçük parçalardaki polinomlarla interpolasyon yöntemleri kullanılarak bu noktalara ait jeoit yükseklikleri yeniden hesaplanmıştır. Bilinen proje değerleri kesin değerler olarak kabul edilmiş ve hesaplanan değerler bu değerlerle karşılaştırılarak irdelenmiştir.

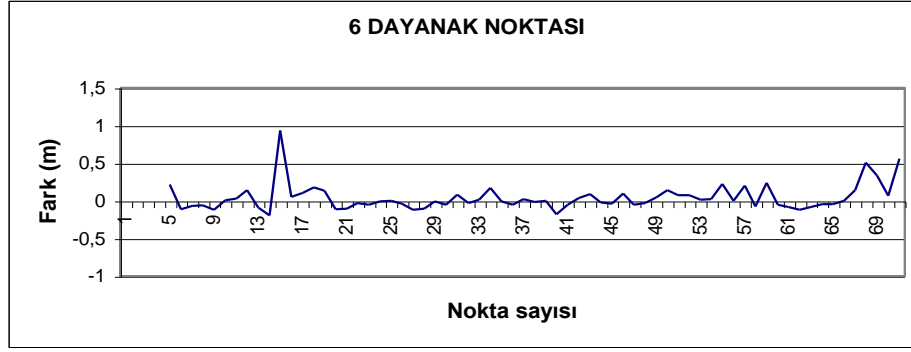


Şekil 2. Ankara bölgesinde uygulama için alınan dayanak noktaları

Ankara'ya ait noktalarda kayan yüzey yardımıyla interpolasyon yöntemi kullanılarak ilk olarak 6 adet nokta dayanak noktası olarak alınmış, bu noktalardan yararlanılarak diğer noktalara ait jeoit yükseklikleri hesaplanmıştır. Daha sonraki aşamalarda dayanak noktalarının sayıları artırılmış, 23, 35 ve 50 adet dayanak noktası kullanılarak aynı işlemler tekrarlanmıştır. Bu yöntemde kesin değerler olarak alınan proje değerlerine en yakın sonuçlar 50 dayanak noktası ile yapılan hesaplardan elde edilmiştir. Proje değerlerine en uzak sonuçlar ise 6 dayanak noktası ile yapılan hesaplardan alınmıştır (Şekil 3,4).



Şekil 3. 50 dayanak noktası kullanılarak 29 nokta için hesaplanan farklar



Şekil 4. 6 dayanak noktası kullanılarak 73 nokta için hesaplanan farklar

Uygulamada kullanılan ikinci interpolasyon yöntemi en küçük parçalardaki polinomlarla interpolasyon yöntemidir. Bu yöntemde dayanak noktaları yardımı ile bilineer, biquadratik ve bikübik yüzeyler geçirmek suretiyle noktaların jeoit yükseklikleri hesaplanmıştır.

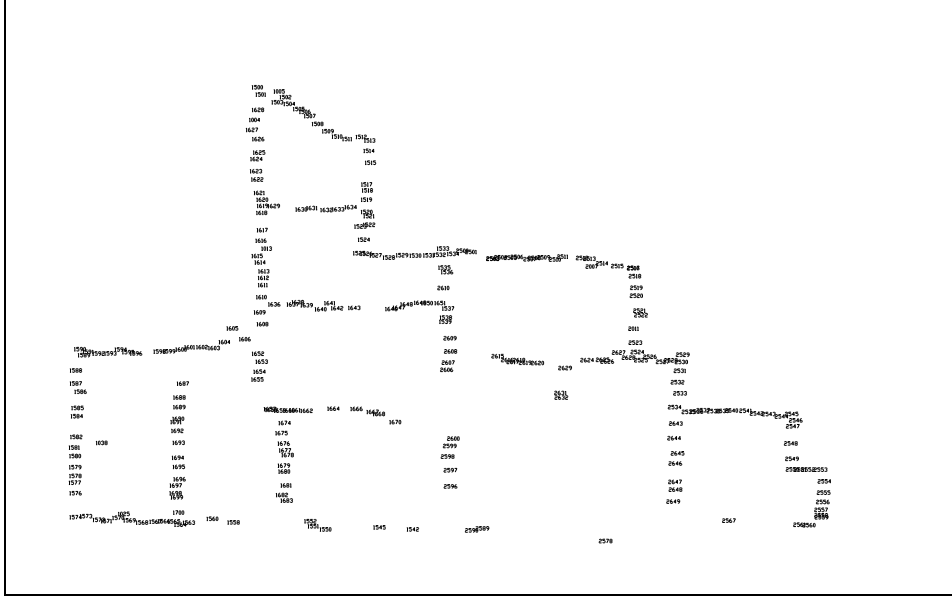
Ankara'da bu yöntemle alınan en iyi sonuçlar bilineer yüzey hariç 50 dayanak noktası ile alınan sonuçlardan elde edilmiştir. Biquadratik ve bikübik yüzeyler ile alınan bu sonuçlarda maksimum fark 0.10 m'dir. En kötü sonuç ise bilineer yüzeyle 0.21 m'lik bir farkın bulunduğu, 23 dayanak noktası kullanılarak yapılan hesaplardan alınmıştır.

### 3.2 Bursa Jeodezik Ağındaki Uygulama

Bursa jeodezik ağı, Bursa Su ve Kanalizasyon İdaresi tarafından 530 km<sup>2</sup>'lik Bursa Metropolitan Alanı ve yakın çevresinin 1/1000 ölçekli sayısal harita üretimi projesi çerçevesinde oluşturulmuştur.

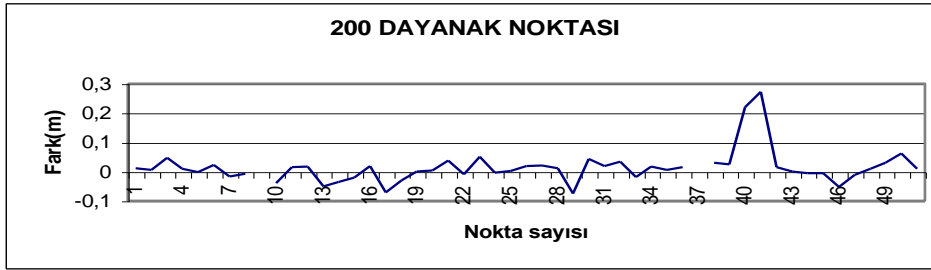
Bu çalışmada Bursa jeodezik ağına ait 423 nokta içerisinde yatay konumu ve elipsoidal yüksekliği GPS ile, ortometrik yüksekliği ise geometrik nivelmanla belirlenmiş 250 adet noktadan yararlanılmıştır (Şekil 5). Üstte belirtilmiş olan iki farklı interpolasyon yöntemi kullanılarak değerlendirmeler yapılmıştır.

Bursa'da kayan yüzey yardımıyla interpolasyon yöntemi kullanılarak 250 nokta içerisinde bölgeyi kapsayacak şekilde 50 tane dayanak noktası seçilmiş ve diğer 200 noktanın jeoit yükseklikleri hesaplanmıştır. Daha sonra dayanak noktalarının sayıları sırasıyla 100, 150 ve 200'e çıkartılmıştır. Proje kapsamında geometrik nivelmanla bulunan ortometrik yükseklik ve elipsoidal yükseklik farklarından elde edilen jeoit yükseklikleri kesin değerler olarak kabul edilmiş ve ikinci bölümde interpolasyon yöntemleri başlığı altında irdelenmiş olan iki interpolasyon yöntemi ile hesaplanan jeoit yükseklikleri bu kesin sonuçlara göre değerlendirilmiştir.

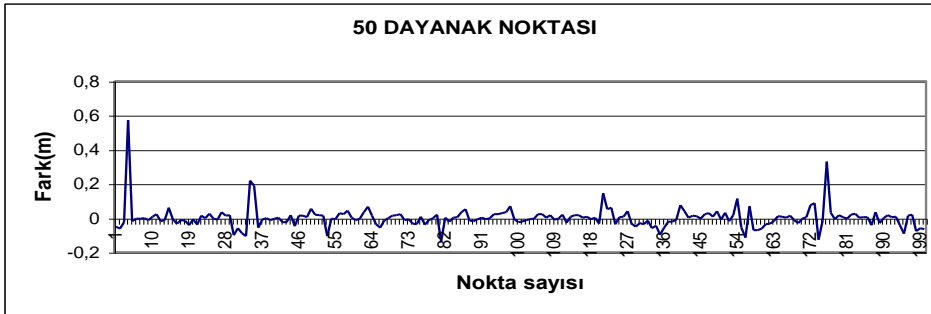


Şekil 5. Bursa nirengi ağı

Kayan yüzey yardımıyla interpolasyon yöntemi kullanılarak yapılan hesaplarda en iyi sonuçlar 200 dayanak noktası kullanılarak, en kötü sonuçlar 50 dayanak noktası kullanılarak yapılan hesaplardan bulunmuştur (Şekil 6,7).



Şekil 6. 200 dayanak noktasıyla 50 nokta için hesaplanan farklar



Şekil 7. 50 dayanak noktası ile 200 nokta için hesaplanan farklar

Bu yöntemle dayanak sayısı arttırıldıkça kesin değerlere yaklaşılmış, ancak blok kenarlarına gelen bazı noktalarda kesin değerden büyük sapmalar görülmüştür. En küçük parçalardaki polinomlarla interpolasyon yönteminde dayanak noktası olarak 250 nokta içerisinde seçilmiş noktalar yardımıyla bilineer, biquadratik ve bikübik yüzeyler geçirilmiş ve istenilen noktaların jeoit yükseklikleri hesaplanmıştır.

İlk etapta bölgeyi kapsayacak biçimde 50 nokta dayanak noktası olarak alınmış, daha sonra dayanak noktaları sayısı arttırılarak 100, 150, 200'e çıkarılmıştır. 50, 100, 150, 200 dayanak noktası kullanılarak alınan sonuçlar birbirine oldukça yakındır. Ancak değerlendirmeler sırasında her dayanak noktası için bikübik yüzeyin kesin değerlere daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

#### 4. SONUÇ

Günümüzde yaygın kullanım alanına sahip olan GPS ile jeodezik ağların tesisi, konumlandırılması ve mevcut ağların iyileştirilmesi ve sıklaştırılması çalışmaları yürütülmektedir. Oldukça zaman alıcı ve maliyet gerektiren bu çalışmalar GPS ile daha kolay ve ucuz hale gelmiştir. GPS ile elde edilen yükseklikler elipsoidal yüksekliklerdir. Bu yüksekliklerden yararlanarak ortometrik yükseklikleri bulmak için bölgeye ait duyarlı jeoitin belirlenmesi ve jeoit yüksekliklerinin hesaplanması gerekir. Yaklaşım yöntemlerinin en önemlilerinden ikisi global jeoit ve yerel jeoit GPS/Nivelman verilerinden faydalanarak ortometrik yüksekliklerin belirlenmesidir. Global jeoit kullanarak bugünkü şartlarda birkaç cm doğrulukla sonuç alınabilir. Yerel jeoit kullanılması durumunda da cm'ler seviyesinde sonuç almak olasıdır. Bunun için uygulama bölgesinde birkaç noktanın ortometrik ve elipsoidal yükseklikleri hassas olarak biliniyor ise, bu noktalar dayanak noktaları alınarak bir yüzey belirlenir, daha sonra uygun interpolasyon yöntemleri kullanılarak elipsoidal yüksekliği bilinen diğer noktaların ortometrik yükseklikleri hesaplanabilir.

Bu çalışmada topografik yapıları birbirinden farklı olan iki bölge ele alınarak, bu bölgeler için kullanılan yüzey belirleme yöntemlerinin davranışları incelenmiştir. Ankara'da 79, Bursa'da 250 nokta dayanak noktası olarak kullanılmıştır. Ankara'ya ait dayanak noktası yoğunluğu  $30 \text{ km}^2$ 'ye bir nokta iken, Bursa'da  $2 \text{ km}^2$ 'ye bir noktadır. Dayanak noktalarına ait geometrik nivelman ile belirlenmiş ortometrik yükseklikler için dengelenmiş noktaların yüksekliklerinin ortalama hatası en küçük  $\pm 3.9 \text{ mm}$ , en yüksek  $\pm 24 \text{ mm}$ 'dir. Birim ölçünün ortalama hatası ise  $m_0 = 14.7 \text{ mm}$ 'dir. Elipsoidal yüksekliklere ait ortalama hata  $0.080 \text{ m}$ 'dir.

İki uygulama bölgesi üzerinde yapılan irdelemede, jeoit yükseklik değişiminin daha az olduğu Ankara bölgesinde kenarlara düşen noktalar hariç bölgenin ortasındaki noktalarda kayan yüzey yardımıyla interpolasyon yönteminin, en küçük parçalardaki polinomlarla interpolasyon yöntemine göre kesin değerlere daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Ancak biquadratik ve bikübik yüzeyler geçirilmesiyle  $dm$ 'nin altında bir duyarlılığa ulaşılmıştır. Jeoit değişiminin Ankara'ya göre biraz daha fazla olduğu Bursa bölgesinde ise yine benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Her iki bölgede de kayan yüzey yardımıyla interpolasyon yöntemi kullanılarak yapılan hesaplarda dayanak noktası sayısı arttırıldıkça kesin değerlere yaklaşıldığı ancak bölgeyi sınırlayan bazı uç noktalarda kesin değerden büyük sapmalar olduğu görülmüştür.

**KAYNAKLAR**

1. AYAN T., (1978), “**1976 Türkiye Geoidi** “, Harita Dergisi, Sayı:85.
2. AKSOY A., AYAN T., DENİZ R., (1998), “**Global, Bölgesel ve Ülke Jeodezik Ağları Hakkında**”, Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, Sayı : 84.
3. AYDIN Ö., (1995), “**Yüksek Lisans Ders Notları**”, Hassas Yükseklik Ölçmeleri.
4. KARTAL A., “ **GPS Yöntemi ile Yükseklik Belirlenirken İnterpolasyon Yöntemlerinin Kullanılması**” , Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, (1998).
5. HEISKANEN , W.A. , and MORITZ H., (1967), “**Physical Geodesy** “ .
6. RAPP R., (1992), Proceedings Volume, “**Computation and Accuracy Of Global Geoid Undulation Models**”, Sixth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning.
7. ZHIHENG J., DUQUENNE H., (1996), “**On The Combined Adjustment Of a Gravimetrically Determined Geoid and GPS Levelling Stations**”, Journal of Geodesy, France
8. OLLIKAINEN M., KIRKKUMMI (1997), “**Determination of Orthometric Heights Using GPS Levelling**”, Publications of The Finnish Geodetic Institute.
9. SCHWARZ K.P, SIDERIS M.G, FORSBERG R, (1985), “**Precise Geoid Heights and Their Use In GPS-Interferometry**”, The University of Calgary.
10. KING R.W., MASTERS E.G., RIZOS C., et.al ,Australia (1985), “**Surveying With GPS**”.
11. RADWAN M., STEFANOVIC P., TEMPFLI K., ( 1977 ), “**Data Acquisition, Processing and Applications**”, ITC.
12. GÜLER A., (1978), “**İnterpolasyon Yöntemleri**” , Harita Dergisi, Sayı:85, Trabzon
13. İNAL C., (1996), “**Yerel Jeoit Geçirilerek GPS Sonuçlarından Yükseklik Belirlemesi**”, Konya
14. Gravity and Magnetics Terms for the 4th Edition of the SEG encyclopedic dictionary
15. DINTER G., ILLNER M., JAGER R., (1996) , “**A synergetic approach for the transformation of ellipsoidal heights into a standard height reference system (HRS)**”, Germany
16. KÖKSAL T., (1995) , “**Sonlu Elemanlar Metodu**”, Yıldız Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul

**YTÜD 2001/1**