

POLE ASSIGNMENT AND LQR BASED ACTIVE VIBRATION CONTROL OF A SIMPLY SUPPORTED PIPE CONVEYING FLUID

Ersun YALÇIN*

Yıldız Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü Yıldız-İSTANBUL

Geliş/Received: 14.06.2004 Kabul/Accepted: 02.02.2005

ABSTRACT

The passive vibration control of elastic and parameter varying systems such as a pipe conveying fluid is usually ineffective. Therefore extensive researches into active vibration control is carried out. The main subject of these researches is to design method of controller named regulator. In this work, two design approaches, pole assignment and LQR are considered. By applying this approaches, the suppression of vibration of a pipe conveying fluid is discussed.

Keywords: Pipe vibration, Vibration control, Pole assignment, LQR.

MSC number/numarası: 70J50, 37N35, 49N05

SABİT HIZDA AKAN AKIŞKAN TAŞIYAN BASİT MESNETLİ BİR BORUNUN KÖK ATAMA VE LQR ESASLI AKTİF TİTREŞİM KONTROLÜ

ÖZET

Akışkan taşıyan borular gibi elastik ve değişken yapılarda oluşan titreşimlerin sönümlenmesinde pasif elemanlarla titreşim kontrolü etkin olamamaktadır. Bu nedenle aktif titreşim kontrolü uygulanmak suretiyle daha etkin bir titreşim sönümlenme sistemi geliştirilmeye çalışılmaktadır. Aktif kontrol uygulamasında en önemli çalışma alanı uygun kontrol yönteminin belirlenmesidir. Bu çalışmada kök atamaya dayalı kontrol ve lineer karesel kontrol yöntemlerinin etkinliği incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler : Boru titreşimleri, Titreşim kontrolü, Kök atama, LQR.

1. GİRİŞ

Akışkan hızına bağlı olarak akışkanı taşıyan boru sisteminin doğal frekansları değişmektedir. Yeterince yüksek akış hızlarında borunun doğal frekanslarının azalması nedeniyle, borunun maruz kalabileceği bir dış etki büyük genlikli titreşimlere sebep olabilmektedir. Bu durum borunun hasar görmesine sebep olabileceği gibi çevresinde bulunan sistemlerin de zarar görmesine neden olacaktır. Özellikle ince cidarlı esnek boruların kullanıldığı su türbinlerinde ve roket motorlarının yakıt besleme borularında önemli bir problemdir.

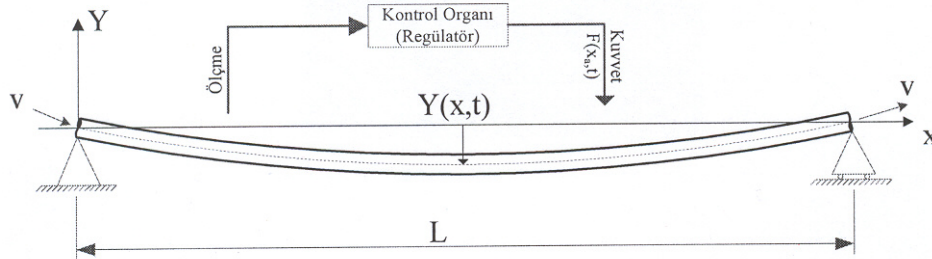
Bu alanda yapılan ilk çalışma Aitken [1] tarafından yayınlanmıştır. Yeterince yüksek akış hızlarında bir ucu serbest kauçuk borunun yaptığı hareketler ilk defa Marcel Brillouin, 1885, adındaki araştırmacı tarafından kendi kendini besleyen titreşimler (self-excited) olarak tanımlanmıştır. Marcel Brillouin'nın öğrencilerinden biri olan Bourrieres [2], ilk dikkate değer

* e-posta: yalcin@yildiz.edu.tr, Tel: (212) 259 70 70 / 2494

çalışmayı yayınlamıştır. Bu çalışmada, bir ucu ankastre mesnetli borunun kararlılığını incelemiştir. Doğru hareket denklemini elde etmesine rağmen analitik olarak kritik akış hızını elde edememiştir. Bu konudaki araştırmaların Arabistan petrol boru hattındaki titreşim problemi nedeniyle tekrar gündeme geldiği ve hız kazandığı görülmektedir. Ashley ve Haviland [3], tarafından yapılan çalışmalardan sonra Feodos'ev [4], akışkan taşıyan borunun hareket denklemini elde ederek iki uçundan mesnetli borunun dinamik davranışlarını incelemiştir. Housner [5], farklı bir yaklaşımla inceleme yapmıştır. Her iki araştırmacı da yeterince yüksek akış hızlarında basit mesnetli bir borunun eksenel yüke maruz bir kiriş gibi burkulduğunu bulmuşlardır. Paidoussis ve Issid [6], yayınladıkları çalışmada değişik sınır şartları için akışkan taşıyan boruların kararlılığını incelemiştir. Bu çalışma günümüze kadar yapılan bir çok çalışmaya temel teşkil etmiştir. 1993 yılında Paidoussis ve Li yayınladıkları çalışmalarında akışkan taşıyan boruların dinamik davranışlarını inceleyen önemli çalışmalar konusunda geniş bir özet yapmışlardır. Kaynakçalarında yaklaşık ikiyüztuz çalışmadan bahsetmektedirler [8].

Akışkan taşıyan borularda oluşan titreşim problemleri yapısal değişiklik veya pasif kontrol yöntemleriyle sınırlandırılması mümkün olabilmekle birlikte, günümüzde gelişen teknoloji titreşimlerin aktif olarak sönümleyecek ve sistemlerin kararlılığını dinamik olarak iyileştirecek yöntemlerin ve cihazların geliştirilmesine imkan vermektedir. Balas [9,10], borular gibi elastik sistemlerin titreşimlerinin aktif olarak sönümlemenin genel çerçevesini çizmiştir.

Bu çalışmada akışkan taşıyan borunun titreşimlerinin aktif kontrolünde iki farklı yaklaşımın incelenmesi yapılmıştır. Bu yaklaşımlar, kök atama yöntemiyle regülatör tasarımı, ikinci yaklaşım durum değişkenlerinin geri beslemesine dayalı, lineer karesel (LQR) regülatör tasarımıdır. Her iki yaklaşımla regülatör tasarımında ki temel hedef borunun ilk iki titreşim biçimini sönümlemektir.



Şekil 1. Akışkan taşıyan boru

2. SİSTEMİN MATEMATİK MODELİ

Sistemin basit modeli Şekil 1'de görülmektedir. Sistemin matematik modeli Newton'un ikinci prensibi yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir [6,11].

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \rho A v^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2\rho A v \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t} + M_s \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = F(x_a, t) \quad (1)$$

Burada Y, yer değiştirme olup x koordinatının ve zamanın, t, fonksiyonudur. E elastite modülü, I eğilmede kesit atalet momenti, A borunun iç kesit alanı, v akış hızı, ρ akışkanın yoğunluğu ve M_s birim uzunluktaki borunun içindeki akışkan ile birlikte kütesidir. Matematik modelin çıkarılmasında aşağıdaki kabuller yapılmıştır:

- Akışkan sıkıştırılmazdır.
- Boru içinden akmakta olan akışkan düzgün akım çizgilerine sahiptir.

Pole Assignment And Lqr Based Active Vibration...

- Yer çekimi ivmesinin etkisi ihmal edilmiştir.
- Borunun içindeki akışkanın her noktadaki hızı aynıdır.
- Boru, basıncın etkisiyle şekil değiştirmemektedir.
- Boru x-y düzlemi içinde düşey yönde titreşim hareketini yapmaktadır.
- Boru elastik lineer malzemeden imal edilmiştir.
- Bütün hareketler küçük kabul edilmiştir.

Matematik modelin ilk ve son terimi rijidlik ve atalet terimi olup akış hızından bağımsızdır. Soldan ikinci terim akışkanın borunun eğimi doğrultusunda yönünü değiştirebilmek için gerekli kuvveti ifade eder. Soldan üçüncü terim ise akışkan parçacığının dönme hareketini yapması için gereken kuvveti ifade eder. Başka bir tanımlamayla Coriolis kuvvetini ifade etmektedir. $F(x_a, t)$ ise x_a noktasına titreşimleri sönümlemek ve sınırlamak amacıyla uygulanan kuvvettir. Bu çalışmada kuvvetin aşağıdaki gibi bir fonksiyonla ifade edildiği kabul edilecektir.

$$F(x_a, t) = u(t)\delta(x - x_a) \quad (2)$$

Burada $u(t)$ zamana bağlı değişen ve kontrol için seçilen yönteme göre belirlenen bir fonksiyondur. Bu noktadan itibaren $u(t)$, kontrol kuvveti olarak adlandırılacaktır. $\delta(x-x_a)$ fonksiyonu Dirac delta fonksiyonudur.

Modelin kapalı formda çözümü yoktur. Galerkin yöntemi uygulanarak titreşim biçimlerine ayrıştırılmak suretiyle yaklaşık olarak çözümlenebilir. Galerkin yönteminde yaklaşık çözüm olarak sonlu elemanlı bir dizi kullanılır.

$$\tilde{Y}(x, t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) \phi_i(x) \quad (3)$$

Bu çözüm önerisinde $\phi_i(x)$ fonksiyonu sistemin sınır şartlarını sağlayan ve mukayese fonksiyonu olarak adlandırılan bir fonksiyondur. $w_i(t)$ fonksiyonları bilinmeyen fonksiyonlar olup hesaplanacaktır. Mukayese fonksiyonu olarak, sistemin geometrik sınır şartlarını sağlayan basit mesnetli bir kirişe ait şekil fonksiyonunun seçilmesi uygundur.

$$\phi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Burada L , borunun uzunluğudur. Yaklaşık çözüm (3), deklemler (1) de yerine yazıldığında denklemin ε gibi bir hata ile sağlanabileceği açıktır.

$$EI \frac{\partial^4 \tilde{Y}}{\partial x^4} + \rho A v^2 \frac{\partial^2 \tilde{Y}}{\partial x^2} + 2\rho A v \frac{\partial^2 \tilde{Y}}{\partial x \partial t} + M_s \frac{\partial^2 \tilde{Y}}{\partial t^2} - F(x_a, t) = \varepsilon \quad (5)$$

Galerkin yöntemine göre ε hatası mukayese fonksiyonuna dik olmalıdır [7].

$$\int_0^L \varepsilon \phi_j(x) dx = 0 \quad (6)$$

Böylece bilinmeyen fonksiyonlar olan $w_i(t)$ fonksiyonlarının bulunması için aşağıda görülen adi diferansiyel denklem takımı elde edilir.

$$M_0 \ddot{w}(t) + G_0 \dot{w}(t) + K_0 w(t) = F_0 u(t) \quad (7)$$

Burada $n=2$ için M_0 , G_0 , K_0 ve F_0 matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
M_0 &= \frac{M_s L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
w(t) &= [w_1(t) \quad w_2(t)]^T, \\
G_0 &= \rho A v \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi x_a}{L}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi x_a}{L}\right) \end{bmatrix}, \\
K_0 &= \frac{L}{2} \begin{bmatrix} EI \frac{\pi^4}{L^4} - \rho A v^2 \frac{\pi^2}{L^2} & 0 \\ 0 & EI \frac{16\pi^4}{L^4} - \rho A v^2 \frac{4\pi^2}{L^2} \end{bmatrix}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Sistemin temel doğal frekansı,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{M_s} - \frac{\rho A v^2}{M_s}} \tag{9}$$

olup, görüldüğü gibi akış hızının bir fonksiyonudur [11]. Akış hızının artması ile temel doğal frekansın değeri azalmaktadır. Gerek statik burkulma analizinden [11], ya da (9) ifadesinin sıfıra eşitlenmesi ile temel doğal frekansını sıfır yapan ve basit mesnetli borunun statik burkulmasına neden olan akış hızı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$v_c = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{10}$$

Bu akış hızı değeri kritik hızı göstermektedir. Kritik akış hızı civarında dinamik ve statik kararsızlık söz konusudur. Sistemin matematiksel modeli, durum uzayında aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{11}$$

$$y = Cx$$

Burada

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M_0^{-1} K_0 & -M_0^{-1} G_0 \end{bmatrix}, \\
B &= \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ M_0^{-1} F_0 \end{bmatrix}, \\
C &= \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) & \dots & \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & 0_{1 \times n} \end{bmatrix}, \\
x &= [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n \quad \dot{w}_1 \quad \dot{w}_2 \quad \dots \quad \dot{w}_n]^T. \tag{12}
\end{aligned}$$

Pole Assignment And Lqr Based Active Vibration...

olup, $2n \times 1$ boyutunda bir vektördür. A , $2n \times 2n$ boyutunda bir matristir. B ise bir vektör olup $2n \times 1$ boyutundadır.

Bu çalışmada örnek olarak yapılan sayısal hesaplamalarda $\rho A = 0.383$ kg/m, $L = 3.2$ m, $M_s = 0.714$ kg, $E = 6.895e10$ N/m², $I = 8.97621e-9$ m⁴ değerleri kullanılmıştır.

3. AKTİF TİTREŞİM KONTROLÜ

Borunun maruz kalacağı herhangi bir etki, borunun titreşmesine sebep olacaktır. Akış hızına bağlı bir titreşim karakteristiği gösteren borunun titreşimlerini sönmölemek ve kritik akış hızı civarında dinamik kararlılığını iyileştirmek amacıyla bir çözüm arayışı söz konusudur. Pasif elemanlarla üretilen çözümler, boru sistemi gibi değişken yapıya sahip sistemlerde yeterince etkili olamamaktadır. Bu durum aktif titreşim kontrolü araştırmalarının temel sebebidir.

Kontrol teorisi ve uygulamaları hakkında yapılan bir çok çalışmada olduğu gibi aktif titreşim kontrolü alanındaki çalışmalarda da en önemli sorun uygun kontrol stratejisini/yöntemini belirlemektir. Burada incelenen iki yöntem de durum değişkenlerinin geri beslenmesine dayalıdır. Durum değişkenleri vektörü x olmak üzere $u(t)$ kontrol kuvveti, durum değişkenlerinin ağırlıklı toplamıyla hesaplanır.

$$u(t) = -Kx \quad (13)$$

Burada K , kazanç vektörü olarak adlandırılır. En uygun kazanç vektörünün belirlenmesi için yapılan yaklaşımlar kontrol yönteminin adını koymaktadır.

3.1. Kök Atama Esasına Dayalı Regülatör Tasarımı

Yaklaşımlardan biri, sisteme ait köklerin seçilmesi esasına dayalıdır. Sistemin sahip olması istenen kökler yani p_i 'ler seçilir. Aşağıdaki denkleme sağlayacak şekilde K kazanç vektörü belirlenir.

$$|\lambda I - A + BK| = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \dots (\lambda - p_{2n}) \quad (14)$$

Kazanç vektörünün belirlenmesi için farklı yaklaşımlar mevcuttur. Bu çalışmada belirleme işlemi MATLAB programının Control Toolbox'ındaki "place" komutuyla yapılmıştır.

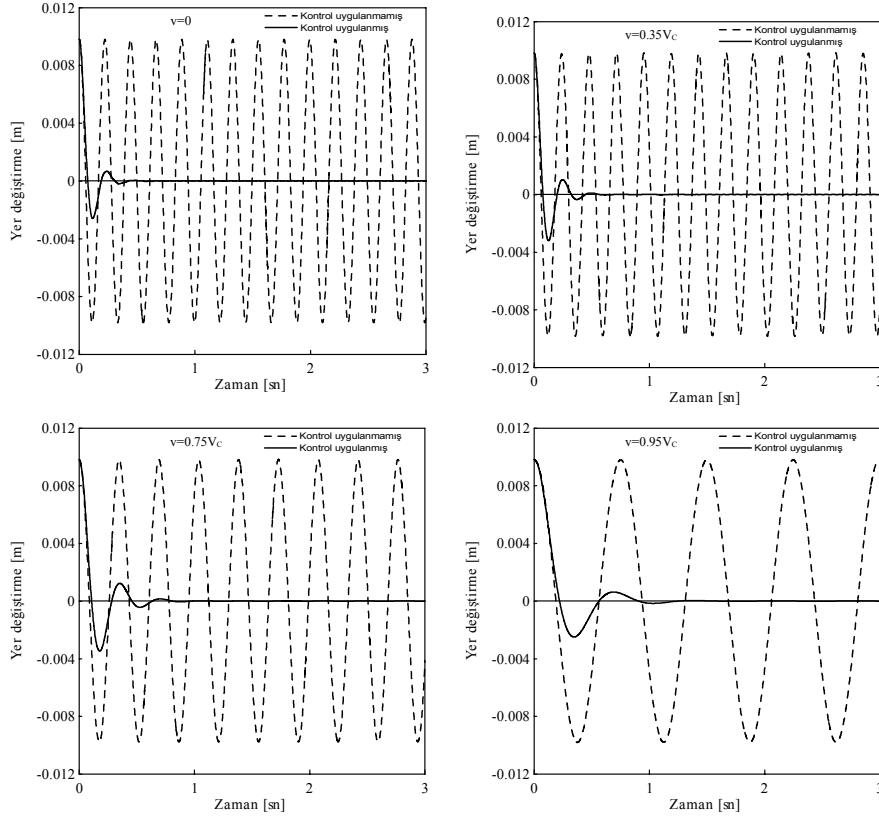
Sistemin köklerinin atanmasının önemli bir şartı vardır ki, bu sistemin kontrol edilebilir olma şartıdır. Eğer sistemin durum değişkenleri belli bir değerden istenilen değere sonlu zamanda getirilebiliyorsa, bu tip sistemlere kontrol edilebilir denir [11,12]. Sistemin kökleri imajiner eksenden çok uzak olacak şekilde seçilmemelidir. Köklerin imajiner eksenden uzak atanması için gerekli kazanç değerleri çok büyük olacaktır. Dolayısıyla gerekli kontrol kuvvetinin aşırı artmasına neden olacaktır. Gerekli kuvvetin eyleyici (actuator) tarafından sağlanması sorun olabileceği gibi sistem kontrol edilmeye çalışılırken sisteme fiziksel zarar verilebilmesi de mümkündür.

Sistemin temel doğal frekansı, (9) denkleminde hemen görülebileceği gibi akış hızının fonksiyonudur. Akış hızının artması ile değeri azalmakta ve kritik akış hızına ulaştığında sıfır olmaktadır. Bu nedenle akış hızının kritik akış değerine yakın bir değerinde istenilen kök değerlerinin seçilmesi uygun olacaktır. Sistemin sahip olması istenen ilk iki doğal frekans 10 Rd/s ve 100 Rd/s seçilirse ve sönmö oranlarında sırasıyla 0.4 ile 0.1 olması istendiğinde sistemin sahip olması gereken kökler $-4 \pm 9.4166i$ ve $-10 \pm 99.4987i$ olmalıdır [12]. $n=2$ ve $v=0.95V_c$ için aşağıdaki kazanç değerleri elde edilir.

$$K = [37.894 \quad 4102.2 \quad 23.332 \quad -23.79] \quad (15)$$

Bu kazanç değerleriyle belirlenen kontrol kuvveti sisteme uygulandığında, farklı akış hızlarında boruda herhangi bir nedenle oluşacak titreşimleri sönmölediği görülmektedir (Şekil 2). Aynı grafiklerde verilen kontrol uygulanmamış sistemin eğrilerinden de anlaşılacağı gibi akış

hızını artması ile titreşimlerin periyodunun arttığı dolayısıyla temel doğal frekansın değerinin azaldığı görülmektedir.



Şekil 2. Kök atama yöntemiyle tasarlanan regülâtörün etkisi ($x_a=9L/16$, $x_b=7L/16$)

3.2. Lineer Karesel Regülâtör (LQR) Tasarımı

Yukarıda kazanç vektörünün belirlenmesinde sistemin sahip olması istenen köklerinin seçimi regülâtörün etkinliği açısından önemlidir. Köklerin seçimi tasarımcının bilgisine ve sezgilerine dayalıdır. Hata ve kontrol için gerekli enerji üzerinde sınırlama yoktur. Eğer kazanç vektörünün belirlenmesinde minimum enerji ve minimum hata şartlarını sağlaması istenirse, aşağıdaki performans indeksinin minimize edilmesi problemine ulaşılır.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (16)$$

Burada Q ve R pozitif tanımlı ağırlık matrisleridir. Performans indeksini minimum yapan kazanç vektörü

$$K = R^{-1} B^T P \quad (17)$$

dür. Burada P , Ricatti denkleminin çözümünden elde edilir. Ricatti denklemi

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (18)$$

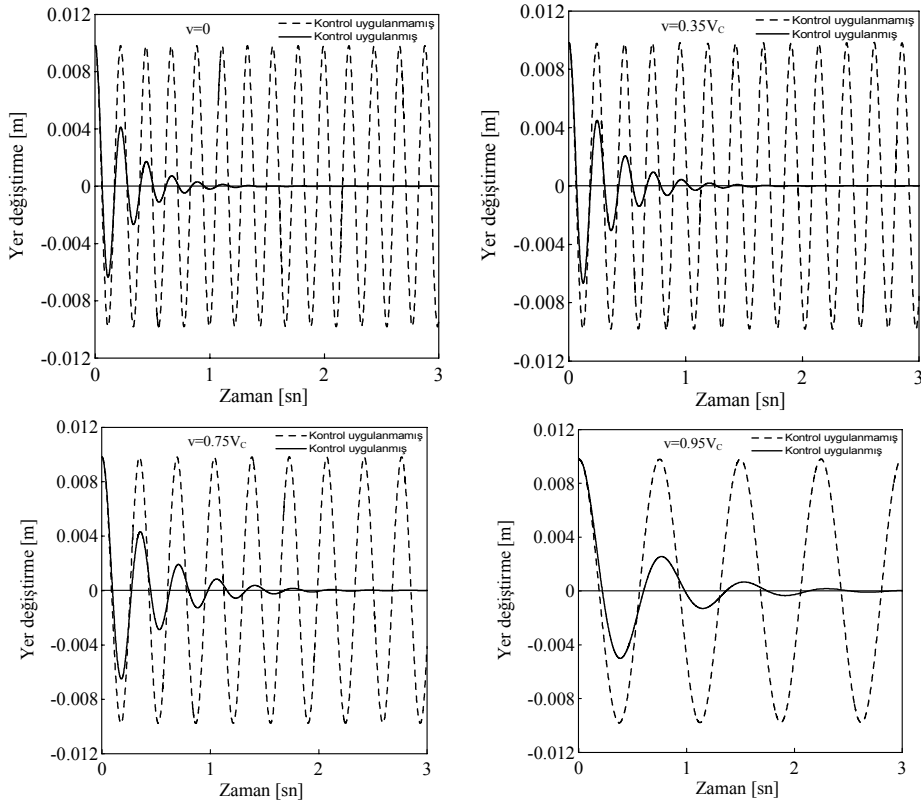
şeklinde ifade edilir. Bu yöntemde en önemli sorun **Q** ve **R** ağırlık matrislerinin belirlenmesidir. Bu çalışmada $n=2$ için $R=0.5$ ve

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \quad (19)$$

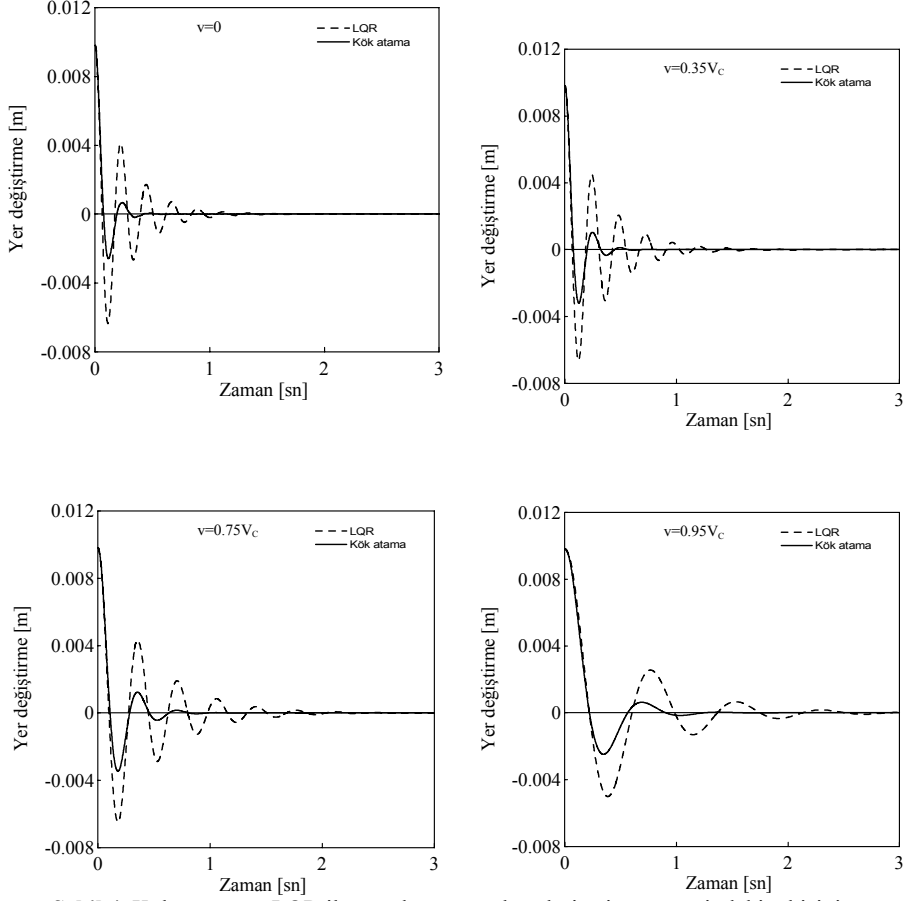
seçilerek kazanç vektörü

$$K = [3.911 \quad 1238.1 \quad 8.7479 \quad -19.41] \quad (20)$$

olarak elde edilir. Borunun, elde edilen kazanç değerleriyle hesaplanan kontrol kuvvetiyle birlikte gösterdiği davranışı Şekil 3'deki grafiklerde görülmektedir. Farklı akış hızları için elde edilen sonuçlar titreşimlerin sönümlendiğini göstermektedir.



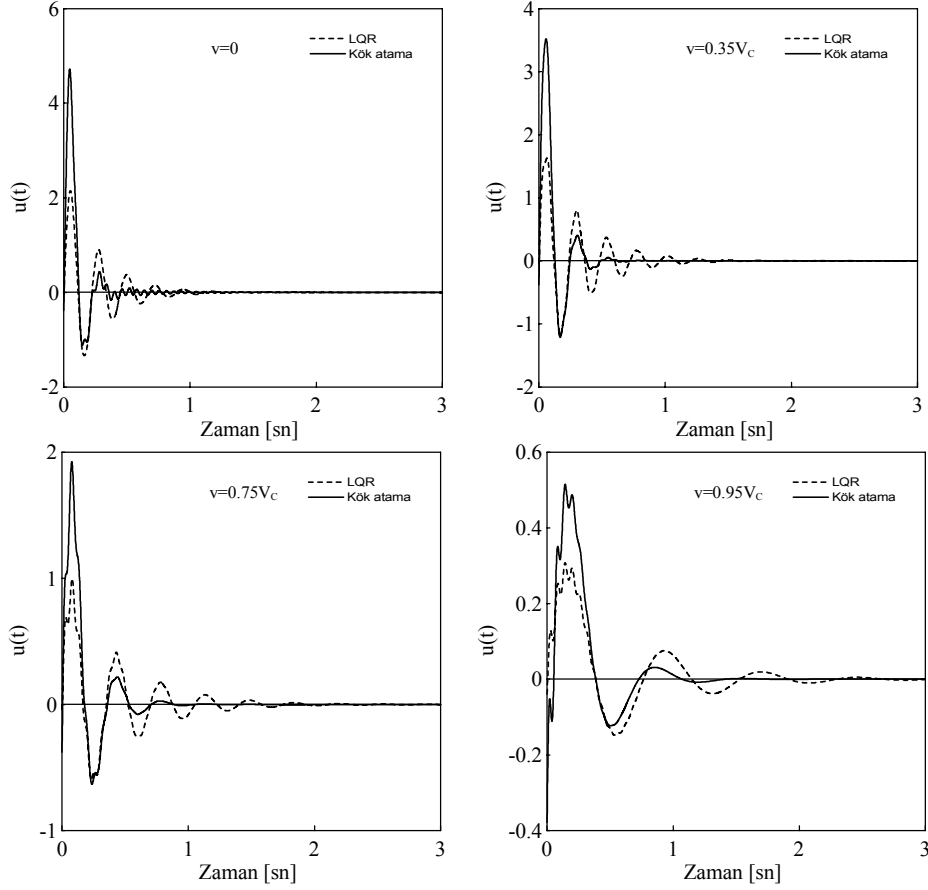
Şekil 3. Lineer karesel regülatörün (LQR) etkisi ($x_a=9L/16$, $x_0=7L/16$)



Şekil 4. Kök atama ve LQR ile tasarlanan regülatörlerin sistem üzerindeki etkisinin karşılaştırılması ($x_a=9L/16$, $x_b=7L/16$)

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Sabit hızla akan akışkan taşıyan borunun bir anlık bozucu etki sonucu oluşacak olan titreşimlerini sönmölemek amacıyla aktif titreşim kontrolü uygulanmıştır. Uygulanan aktif kontrol yöntemleri durum değişkenlerinin geri beslenmesi esasına dayalıdır. Yöntemlerin her ikisinde de tasarımcının seçmesi gereken parametreler yöntemin etkinliğini doğrudan etkilemektedir. Her iki yöntemde titreşimleri beklentiler doğrultusunda sönmölemektedir. Şekil 4 te görüldüğü gibi kök atama yöntemi ile tasarlanan regülatör ile lineer karesel regülatör arasında titreşimleri sönmölemek açısından kök atama yaklaşımının daha etkin olduğu izlenimini uyandırmakta ise de Şekil 5 te görüldüğü gibi LQR daha az bir kontrol kuvveti ile (daha az enerji harcayarak) titreşimleri sönmöleme imkanı sağlamaktadır. Eğer aktif titreşim kontrolü uygulanacak sistemin, sahip olması istenen doğal frekans değerleri belirli ise kök atama yöntemi kullanılabilir. Eğer kontrol sisteminden, titreşimlerin sönmölenmesi isteminin dışında, sönmöleme için harcanacak enerjinin minimum olması ve/veya seçilen bir titreşim biçiminin değerlerine göre daha baskın sönmölenmesi isteniyorsa LQR yönteminin kullanılması gerektiği açıktır.



Şekil 5. Kök atama ve LQR ile tasarlanan regülatörlerin ürettiği kontrol kuvvetlerinin karşılaştırılması ($x_a=9L/16$, $x_b=7L/16$)

KAYNAKLAR

- [1] Aitken, J., "An Account of Some Experiments on Rigidity Produced by Centrifugal Force", Philosophical Magazine, 5, 81-105, 1878.
- [2] Bourrieres, F., J., "Sur un phenomene d'oscillation auto-entretenue en mecanique des fluides reels", Publications Scientifiques et Techniques du Ministere de l' Air, 147, 1939.
- [3] Ashley H., Haviland, G., "Bending Vibrations of A Pipeline Containing Flowing Fluid", Journal of Applied Mechanics, 17, 229-232, 1950.
- [4] Feodos'ev, V., P., "Vibrations And Stability of A Pipe When Liquid Flows Through It", Inzhenernyi Sbornik, 10, 169-170, 1951.
- [5] Housner, G., W., "Bending Vibrations of A Pipeline Containing Flowing Fluid", Journal of Applied Mechanics, 19, 205-208, 1952.
- [6] Paidoussis, M., P., Issid, N., T., "Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid", Journal of Sound and Vibration, 33, 3, 267-294, 1974.
- [7] Meirovitch L., "Analytical Methods In Vibrations", Macmillan Publishing Co. Inc., New York, 1967.

- [8] Paidoussis M. P. , Li G. X., "Pipes Conveying Fluid: A Model Dynamical Problem", Journal of Fluids and Structures, 7:137-204,1993.
- [9] Balas, M., J., "Feedback Control of Flexible System", IEEE Transactions on Automatic Control",AC-23, 4, 673-679,Aug. 1978.
- [10] Balas, M., J., "Active Control of Flexible Systems", Journal of Optimization Theory And Applications,25, 3 , 415-436,July 1978.
- [11] Yalçın E., "Akışkan Taşıyan Bir Borunun Aktif Titreşim Kontrolü", Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Y. T. Ü, 1995.
- [12] Kuo B. C., "Automatic Control Systems", 6. Baskı, Prentice-Hall International Editions, 1991.

Pdf Source: [Sigma](#)