



PhD Research Article / Doktora Çalışması Araştırma Makalesi
STATIC ANALYSIS OF SYMMETRICALLY LAMINATED RECTANGULAR
COMPOSITE PLATES WITH DIFFERENT BOUNDARY CONDUCTIONS

Erkin ALTUN SARAY^{*1,2}, İsmail BAYER²

¹*Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği Anabilim dalı, Yıldız-İSTANBUL*

²*Yıldız Teknik Üniversitesi, Gemi İnşaatı ve Denizcilik Fakültesi, Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği Bölümü, Yıldız-İSTANBUL*

Received/Geliş: 09.12.2011 Accepted/Kabul: 06.09.2012

ABSTRACT

In this study static analysis of symmetrically laminated rectangular composite plates uniformly lateral loaded are examined. The cases of all edges clamped or all edges simply supported are investigated. Maximum deflections of the symmetrically laminated composite plates consisting of different orientation angle types and aspect ratios are examined parametrically by using the Galerkin Method and the Least Square Method based on the governing differential equations of Classical Lamination Plate Theory (CLPT). Results are compared with Finite Element Method (FEM) software package ANSYS. It is observed that results of the Galerkin Method known as a powerful Weighted Residual Method are more consisted with the results of FEM (ANSYS) than the Least Square Method for all boundary conditions.

Keywords: Symmetrically composite plates, static analysis, maximum deflection, classical lamination plate theory (CLPT), weighted residual methods, the Galerkin Method, the least square method, finite element method (FEM) ANSYS, parametric study.

SİMETRİK KATMANLI DİKDÖRTGEN KOMPOZİT PLAKLARIN FARKLI SINIR KOŞULLARINDA STATİK ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada düzgün yayılı yanal yük etkisindeki simetrik katmanlı dikdörtgen kompozit plaklar statik olarak incelenmiştir. Plakların dört kenarının da ankastre mesnetli veya dört kenarının da basit mesnetli olduğu durumlar incelenmiştir. Farklı tabaka açısı dizilimi ve kenar oranına sahip simetrik katmanlı kompozit plakların maksimum çökme değeri, Klasik Laminasyon Teorisi'nin (KLT) yönetici diferansiyel denklemlerine göre, Ağırlıklı Artıklar Yöntemleri'nden; Galerkin Yöntemi ve En Küçük Kareler Yöntemi kullanılarak parametrik olarak incelenmiştir. Sonuçlar, Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle (SEY) çözümleme yapan ANSYS paket yazılımı sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Güçlü bir Ağırlıklı Artıklar Yöntemi olarak bilinen Galerkin Yöntemi sonuçlarının, SEY(ANSYS) sonuçları ile En Küçük Kareler Yöntemi'ne göre tüm sınır koşullarında daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Simetrik katmanlı kompozit plaklar, statik analiz, maksimum çökme, klasik laminasyon teorisi, Galerkin Yöntemi, en küçük kareler yöntemi, parametrik çalışma.

* Corresponding Author/Sorumlu Yazar: e-mail/e-ileti: erkina@yildiz.edu.tr, tel: (212) 383 28 58

1. GİRİŞ

Bileşik tabakalı kompozitler, yüksek özgül katılık, yüksek özgül dayanım ve tabaka açılarının değiştirilerek istenilen özellikteki yapıyı oluşturmaya olanak sağlaması gibi özellikleri nedeniyle, gemiler gibi kirişlerle desteklenen plaklardan oluşan yapılarda, malzeme ve üretim teknolojilerinin gelişmesine paralel olarak izotropik malzemelere göre daha fazla tercih edilmeye başlamıştır. Kompozit malzemelerin denizcilik alanında balıkçı gemileri, yatlar, askeri gemi ve denizaltılarda yaygın kullanımı çeşitli araştırmacıların çalışmalarında sunulmuştur [1, 2].

Klasik İnce Plak Teorisi'nin (KPT) bileşik tabakalı kompozitlere uyarlanmış hali olan Klasik Laminasyon Teorisi (KLT), Lekhnitskii'nin çalışmalarında verilmiştir [3, 4]. Ambartsunyan özel ortotropik plakların eğilme, serbest titreşim ve burkulma problemlerini kayma deformasyon etkilerini dahil ederek incelemiştir [5]. Whitney ve Leissa basit mesnet sınır koşullarındaki özel ortotropik plakların eğilme problemlerini Fourier serileriyle incelemiştir [6]. Whitney, ankastre mesnetli anizotropik plakların eğilme, burkulma ve titreşim problemlerini Fourier serileri kullanarak incelemiştir [7]. Tsay ve Reddy, izotropik ve ortotropik plakların eğilme, serbest titreşim ve burkulması için, Reissner'in varyasyonel prensibine dayanan karma sonlu eleman formülasyonunu sunmuşlardır [8].

Leissa ve Narita simetrik katmanlı dikdörtgen kompozit plakların serbest titreşimini Rayleigh-Ritz yöntemiyle incelemiştir [9]. Reddy, farklı açılardaki tabakalardan oluşan simetrik ve antisimetrik özel ortotropik ve çapraz katmanlı plakların (0/90, 0/90/0, 0/90/90/0, 0/90/0/90 ve 45/-45) eğilme, burkulma ve serbest titreşim problemlerini kenar oranına (a/b) bağlı olarak, basit mesnetli durum için Navier Yöntemi (çift Fourier serileri), farklı sınır koşulları için Levy Yöntemi (tek Fourier serileri), Varyasyonel Yöntemler (Rayleigh-Ritz) ve Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile incelemiştir. Çözüm için aynı yönetici denklemi, varyasyonel formda kullanan Ritz Yöntemi'nin sonuçlarıyla, diferansiyel formda kullanan Galerkin Yöntemi sonuçlarının yakın çıkacağını belirtmiştir [10].

Kompozit plakların statik eğilme probleminin yönetici denklemini diferansiyel denklem formunda kullanarak Ağırlıklı Artıklar Yöntemleri'yle inceleyen az sayıda araştırmacıdan Soni ve Iyengar, ankastre mesnet sınır koşulları için araştırdıkları problemde, tabakalı antisimetrik ve simetrik çapraz katmanlı ($\pm 45^0$), 0^0 ve 90^0 açılarından oluşan özel ortotropik dikdörtgen plaklarda, tabaka açısı değişimi ve kenar oranı değişiminin (a/b=1, 1.5 ve 2) maksimum çökme ve doğal frekans değerlerine etkisini Galerkin Yöntemi'yle inceleyerek, hızlı bir çözümleme yöntemi olduğunu belirlemişlerdir [11]. Iyengar ve Umaretiya, karşılıklı iki kenarı ankastre diğer kenarları basit mesnetlenmiş sınır koşulları için, kevlar/epoksi, boron/epoksi ve ikisinin birlikte kullanıldığı hibrid malzemeden oluşan, eş eksenli dikdörtgen ve çalıklar geometriyedeki plakların, tabaka açısı (0^0 , 15^0 , 30^0 , 45^0 , 60^0 , 75^0 , 90^0) ve kenar oranı (a/b=0.5, 1 ve 1.5) değişiminin maksimum çökme değerine etkisini, Klasik Laminasyon Teorisi'ne (KLT) göre, Galerkin Yöntemi'yle incelemiştir [12].

Literatürde bulunan bileşik tabakalı kompozit plaklar, kabuklar ve sandviç plaklar üzerine geliştirilen teoriler ve bilgisayarlı hesaplama uygulamaları çeşitli araştırmacıların derleme makalelerinde sunulmuştur [13, 14, 15, 16]. Kreja, güncel derleme makalesinde bileşik tabakalı kompozit plaklar ve bilgisayarlı hesaplama uygulamalarını içeren çalışmaları karşılaştırmalı olarak sunmuştur [17].

Literatürdeki bileşik tabakalı ince kompozit plakların statik analizleri üzerine yapılan çalışmaların ağırlığını, özel ortotropik yapıdaki tabakalı plakların, farklı teori ve yöntemlerle incelenmesi oluşturmaktadır. Kompozit yapılarda üretimdeki kısıtlamalar nedeniyle genellikle 0^0 , 90^0 , 45^0 ve -45^0 açılarındaki tabakalar kullanılır. Orta simetri düzleminin her iki tarafındaki tabakaların, orta simetri düzlemine eşit uzaklıkta ve aynı dizilim açısında olması durumunda yapı simetrik katmanlı olarak adlandırılır. Simetrik katmanlı kompozit plakların sertleşme işlemini izleyen soğuma sırasında ısıl gerilmelerden dolayı bir burkulma göstermedikleri için uygulamada yapının simetrik katmanlı olması tercih edilir [18].

Kompozitlerin gemi yapısında uygulamalarında, uygun tabaka dizilim açısının araştırılmasının yanında, destek elemanlarının yerleştirilmesine bağlı olarak oluşacak farklı kenar oranlarının (a/b ve b/a) ve sınır koşullarının etkilerini incelemek, bilgisayar destekli parametrik çalışma yapılmasını gerektirir. Bu çalışmada düzgün yayılı yanal yük etkisi altında 0^0 , 45^0 , 90^0 ve -45^0 açılarındaki tabakaların farklı sıralamada dizilimiyle oluşturulmuş dört farklı ($[90_2/-45_2/45_2/0_2]_s$ (LT1), $[-45_2/45_2/90_2/0_2]_s$ (LT2), $[45_2/-45_2/0_2/90_2]_s$ (LT3) ve $[0_2/-45_2/45_2/90_2]_s$ (LT4)) simetrik katmanlı dikdörtgen kompozit plak statik olarak incelenmiştir. Plakların dört kenarının ankastre mesnetli veya dört kenarının basit mesnetli olduğu sınır koşullarında, tabakaların dizilim açısı ve kenar oranı (a/b ve b/a'nın 11 farklı değeri) değişiminin plak orta noktasındaki maksimum çökmeye etkisi, Ağırlıklı Artıklar Yöntemleri'nden Galerkin Yöntemi ve En Küçük Kareler Yöntemi kullanılarak MATLAB [19] programlama dilinde hazırlanan bilgisayar programıyla parametrik olarak hesaplanmıştır. Sonuçlar, Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle (SEY) çözümlene yapan ANSYS [20] paket yazılımı sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

2. ANALİZ

2.1. Klasik Laminasyon Teorisi

Klasik Laminasyon Teorisi'nde simetrik katmanlı plakların eğilme-uzama birleşme matrisi B_{ij} sıfırdır. Doğrusal statik analiz için en genel haldeki diferansiyel denklemden doğrusal olmayan terimler, eğilme-uzama terimleri, eğilme-burulma terimleri, eksenel yönlerdeki yüklemeler ve kütleli atalet momenti terimleri sadeleştirildiğinde elde edilen son denklem aşağıdaki gibi gösterilmiştir [10].

$$(D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}) - q(x, y) = 0 \tag{1}$$

Burada “w” çökme fonksiyonunu ve “q” yükü ifade etmektedir. D_{11} , D_{12} , D_{16} , D_{22} , D_{26} ve D_{66} eğilme katılık matrisi elemanları aşağıda verilen (2) ifadesinde gösterildiği gibi hesaplanır [10].

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \tag{2}$$

Yukarıdaki ifadede yer alan \bar{Q}_{ij} dönüşüme uğramış indirgenmiş katılık matrisinin elemanları aşağıdaki (3) ifadesinde gösterildiği gibi, her tabakanın genel eksenle yaptığı θ açısı ve Q_{ij} indirgenmiş katılık matrisi elemanlarından faydalanarak her tabaka için ayrı ayrı hesaplanır [10].

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4(\theta) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{22} \sin^4(\theta) \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{12} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4(\theta) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{22} \cos^4(\theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{66} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \end{aligned} \tag{3}$$

Yukarıdaki ifadedeki Q_{ij} indirgenmiş katılık matrisinin elemanları ortotropik malzemeler için mühendislik sabitleri cinsinden yazımı aşağıdaki (4) ifadesinde gösterilmiştir [10].

$$Q_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), Q_{12} = \nu_{12}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), Q_{22} = E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), Q_{66} = G_{12} \quad (4)$$

Mühendislik sabitleri (E, G ve ν), tabakaların açıları ve her bir tabakanın referans düzlemden uzaklığı, (2), (3) ve (4) ifadelerinde yerine yazılarak (1) ifadesindeki D_{ij} eğilme katılık matrisi elemanları belirlenmiş olur.

Plak kenarlarındaki ankastre mesnet ve basit mesnet sınır koşulları aşağıdaki gibi ifade edilir [10].

Ankastre mesnet durumunda levha kenarları boyunca çökme ve eğilme sıfırdır.

$$w = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad x = 0, a \quad \text{için}$$

$$w = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad y = 0, b \quad \text{için} \quad (5)$$

Basit mesnet durumunda levha kenarları boyunca çökme ve eğilme momenti sıfırdır.

$$w(x, 0) = 0, \quad w(x, b) = 0, \quad w(0, y) = 0, \quad w(a, y) = 0$$

$$M_{xx}(0, y) = 0, \quad M_{xx}(a, y) = 0, \quad M_{yy}(x, 0) = 0, \quad M_{yy}(x, b) = 0 \quad (6)$$

2.2. Ağırlıklı Artıklar (Kalanlar) Yöntemleri

Diferansiyel denklem formunda verilmiş bir matematiksel modelde, yaklaşık çözümü elde edebilmek için seçilen yaklaşım fonksiyonunun diferansiyel denklemde yerine konulmasıyla sıfırdan farklı bir değer elde edilecektir. Bu değer kalan ya da artık değer (ε^R) olarak tanımlanır.

Hata fonksiyonu olarak da tanımlanabilecek bu artık değerlerin belli ağırlıklı fonksiyonlarıyla (φ) çarpımının bölge üzerinde en aza indirilmesi için yapılan işlemlere ağırlıklı artıklar (kalanlar) yöntemi denir [10].

$$\int_{\Omega} \varepsilon_R \varphi d\Omega = 0 \quad (7)$$

Problemin gerçek çözümü (u), ana denklemi her noktada (x, y, z) sağlar. Ana denklemi veya sınır koşullarını sağlayan ϕ_i deneme fonksiyonları (yaklaşım veya koordinat fonksiyonları) ile daha sonra belirlenecek sabit katsayıların (c_i) çarpımıyla elde edilen problemin yaklaşık çözümü ($u^{(n)}$) aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$u^{(n)} = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i; \quad u^{(n)} \rightarrow u \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{limit hali}) \quad (8)$$

$$\varepsilon_R(x, y, z) \neq 0 \quad (9)$$

2.2.1. Galerkin Yöntemi

Galerkin yönteminde hata fonksiyonunu (ε_R) problemin temel diferansiyel denklemindeki önceden seçilen yaklaşım fonksiyonu terimleri ϕ_i 'ler ile çarpıp bölge üzerinde integrali sıfıra eşitlenerek çözüm yapılır. Ağırlıklı artıklar yöntemleri içinde çok güçlü bir yöntem olarak bilinir [10].

$$\int_{\Omega} \varepsilon_R \phi_i d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

2.2.2. En Küçük Kareler Yöntemi

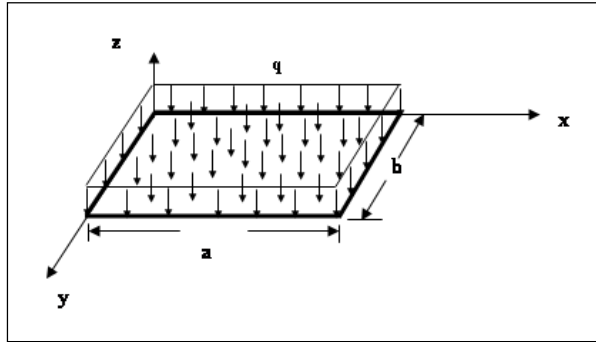
Hata fonksiyonunun karesini bölge üzerinde integre ettikten sonra katsayılarla göre minimize etmeye çalışan yöntem en küçük kareler yöntemi denir [10].

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_{\Omega} (\varepsilon_R)^2 d\Omega = 0 \quad \text{veya} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon_R}{\partial c_i} \varepsilon_R d\Omega = 0 \quad (11)$$

2.3. Sayısal Uygulama

2.3.1. Dikdörtgen Plak Geometrisi, Malzeme Özellikleri ve Laminasyon Sırası

Dikdörtgen plak geometrisi Şekil 1'de gösterildiği gibidir. Burada plak kenarı a, x doğrultusunda, b ise y doğrultusunda yer almaktadır.



Şekil 1. Düzgün yayılı yanal yük (q) etkisindeki dikdörtgen plak

Gemi yapısı levhalar ve onları destekleyen derin eleman veya normal destek elemanlarından oluşmaktadır. Normal destek elemanlarının gemi eni veya boyu doğrultusunda yerleştirilmelerine bağlı olarak, yapı sistemi de enine veya boyuna olarak adlandırılır. Bu çalışmada enine ve boyuna sistemde levha kenarında oluşabilecek farklı durumlar; ankastre mesnet ve basit mesnet durumdaki sınır koşulları için incelenmiştir. Sayısal çözümlerinde uygulanan düzgün yayılı yanal yük olarak 10000 N/m^2 seçilmiştir. Enine ve boyuna yapı sistemlerini temsil etmesi düşünülerek plak kısa kenarının y ekseninde (b kenarı) ve x ekseninde (a kenarı) seçildiği durumlar için plak kısa kenarı 0,2 m. alınmış, 22 farklı kenar oranı için problemler parametrik olarak hesaplanmıştır. Parametrik analiz için incelenen kenar oranları Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. Kenar Oranları

a/b	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4
b/a	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4

Sayısal uygulamalarda kullanılan T300-934 kodlu karbon elyaf takviyeli epoksi reçineli tabakanın malzeme özellikleri aşağıda Çizelge 2’de verilmiştir.

Çizelge 2. T300-934 karbon/epoksi malzeme özellikleri [22,23].

Boyuna Young (Elastisite) Modülü (E_{11})	$148 \cdot 10^9$ (N/m ²)
Enine Young (Elastisite) Modülü (E_{22})	$9,65 \cdot 10^9$ (N/m ²)
Boyuna Kayma Modülü (G_{12})	$4,55 \cdot 10^9$ (N/m ²)
Boyuna Poisson oranı (ν_{12})	0.30
Tabaka kalınlığı (t)	0.000185 - 0.000213 (m)

Orta düzleme göre simetrik yapıda, tabakaların farklı açılarda istiflenmesiyle oluşturulmuş dört farklı tipte simetrik katmanlı kompozit plak Çizelge 3’te gösterilmektedir. 16 tabakadan oluşan plakların tabaka kalınlığı $t=0.0002$ m., plak kalınlığı ise $h=0.0032$ m.’dir.

Çizelge 3. Plak Tipleri

LT1	$[90_2/-45_2/45_2/0_2]_s$
LT2	$[-45_2/45_2/90_2/0_2]_s$
LT3	$[45_2/-45_2/0_2/90_2]_s$
LT4	$[0_2/-45_2/45_2/90_2]_s$

Burada alt indis “2” tabakadan kullanım adedini, “s” ise orta yüzeye göre simetrikliği ifade etmektedir. Örneğin; LT1 kodlu simetrik katmanlı kompozit plak $[90/90/-45/-45/45/45/0/0/0/0/45/45/-45/-45/90/90]$ biçiminde gösterilebilmektedir.

2.3.2. Galerkin Yöntemi’nin Uygulanması

Bu çalışmada incelenen düzgün yayılı yanal yük (q) etkisindeki simetrik katmanlı kompozit plakların eğilme problemi için kullanılan yönetici diferansiyel denklem Bölüm 2.1’de verilmiştir.

$$(D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}) + q(x, y) = 0 \quad (1)$$

Yukarıdaki ifadede yer alan “w” çökme fonksiyonunu belirtmektedir. D_{ij} eğilme katılık matrisi elemanları Bölüm 2.1’de gösterildiği biçimde bulunmaktadır (2, 3, 4). Diferansiyel

denklemden yaklaşık çökme fonksiyonu en genel halde seçilen C_i katsayılarının yaklaşık fonksiyonu ile çarpımı olarak yazılabilir. Plak kenarlarındaki sınır koşullarını sağlayacak biçimde seçilen şekil fonksiyonları ($\phi_i \phi_j$) Çizelge 4’te verilmektedir. Şekil fonksiyonlarında ilk üç terim alınmıştır.

$$w_0 = c_i \phi_i \phi_j \tag{12}$$

Galerkin Yöntemi'yle C_i sabitlerini belirlemek için, yaklaşık çökme fonksiyonunun diferansiyel formdaki bölge denkleminde yerine konulmasıyla elde edilen hata fonksiyonu (ϵ^R) seçilen yaklaşım fonksiyonu ile çarpılıp integrali sıfıra eşitlenir.

$$\int_0^b \int_0^a \left(\left(D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - q(x, y) \right) \phi_i \phi_j \right) d_x d_y = 0 \tag{13}$$

Denklemin çözümünden elde edilen C_i sabitleri yaklaşık çökme ifadesinde w_0 yerine konularak bölgenin aranan noktası için yaklaşık çökme değeri bulunur.

Çizelge 4. Sınır Koşulları İçin Seçilen Şekil Fonksiyonları ($i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n$)

Sınır Koşulları	Şekil Fonksiyonları
Dört kenar ankastre mesnetli	$\phi_i \phi_j = x^{2i} (a-x)^{2i} y^{2j} (b-y)^{2j}$ (14)
Dört kenar basit mesnetli	$\phi_i \phi_j = \left(\text{Sin}\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \right) \left(\text{Sin}\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \right)$ (15)

2.3.3. En Küçük Kareler Yöntemi'nin Uygulanması

En Küçük Kareler Yöntemi'nde, Galerkin Yöntemi'nden farklı olarak önce yaklaşık çökme fonksiyonunun diferansiyel formdaki bölge denkleminde yerine konulmasıyla elde edilen hata fonksiyonunun (ϵ^R) karesi bölge üzerinde integre edilir.

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^b \int_0^a \left(D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - q(x, y) \right)^2 d_x d_y = 0 \tag{16}$$

Integralin alınmasından sonra elde edilen denklemin C_i sabitlerine göre türevi alınır ve ifade sıfıra eşitlenir. Son çözümden elde edilen C_i sabitleri yaklaşık çökme ifadesinde (w_0) yerine konularak bölgenin aranan noktası için yaklaşık çökme değeri bulunur.

2.3.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle (SEY) Çözümleme Yapan ANSYS Paket Yazılımının Kullanımı

Sonlu Elemanlar Yöntemi'nde (SEY) yapının davranışı daha önceden belirlenmiş çok sayıda elemana bölünüp, bu elemanların düğüm noktalarıyla birleştirilmesiyle elde edilen çok sayıda denklem takımının çözümü yapılır. Bu denklem takımındaki bilinmeyen ve hesaplanması istenen

düğüm noktalarındaki değerlerin çözümü bilgisayar kullanımını gerektirmektedir [20]. Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle (SEY) çözüm yapan ANSYS paket yazılımı, bu çalışmada Ağırlıklı Artıklar Yöntemleri'yle bulunan sonuçlarla karşılaştırma yapmak için kullanılmıştır. Programın tabakalı kompozitler için önerdiği, Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi'ne (BMKDT) göre yer değiştiren, incelenen dikdörtgen geometriye uygun geometrideki dört düğüm noktalı SHELL181 [21] kabuk eleman kullanılmıştır. Yazılımda oluşturulan ağ yapısı için eleman büyüklüğünün plak kısa kenarına oranı 0.01 seçilmiştir.

3. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

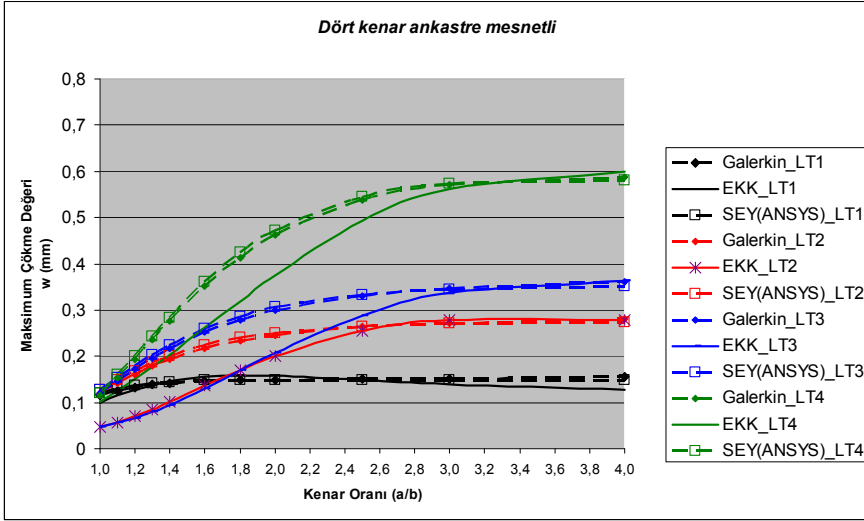
Bu çalışmada düzgün yayılı yanal yük etkisindeki simetrik katmanlı kompozit plaklar statik olarak incelenmiştir. Plakların kenarlarından ankastre mesnetli veya basit mesnetli olduğu iki farklı sınır koşulunda, tabaka dizilim açısı ve kenar oranı değişiminin, plak orta noktasındaki maksimum çökmeye etkisi, Klasik Laminasyon Teorisi'nin (KLT) yönetici diferansiyel denklemleri kullanılarak Galerkin Yöntemi ve En Küçük Kareler Yöntemi ile hesaplanmıştır. Bulunan sonuçlar, Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle (SEY) çözümleme yapan ANSYS paket yazılımı sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Ankastre mesnet ve basit mesnet sınır koşullarında, düzgün yayılı yanal yük etkisindeki dört farklı tipteki simetrik katmanlı plağın maksimum çökme değeri (w) sonuçları kenar oranlarına (a/b ve b/a) bağlı olarak Çizelge 5. ve Şekil 2., 5.'te gösterilmektedir.

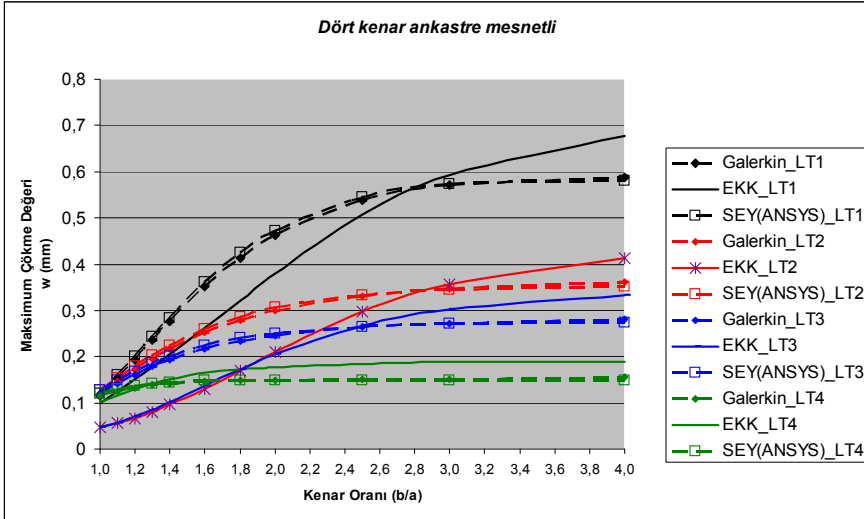
Aynı şekil fonksiyonları (Çizelge 4.) kullanılarak yapılan hesaplamalarda, incelenen iki sınır koşulunda da Ağırlıklı Artıklar Yöntemleri'nden güçlü bir yöntem olarak bilinen Galerkin Yöntemi'nin, Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle (SEY) çözümleme yapan ANSYS paket yazılımıyla yakın sonuçlar verdiği, En Küçük Kareler Yöntemi'nin ankastre mesnet sınır koşulunda her iki yöntemden uzak sonuçlar verdiği görülmektedir (Şekil 2, 3).

Ankastre mesnet sınır koşulunda plak kısa kenarının b kenarı olduğu durumda, incelenen plaklar arasında en fazla çökme değerini veren plağın LT4, en az çökme değerini veren plağın LT1 olduğu görülmektedir. Aynı malzemedeki tabakalarının farklı açılarda dizilimiyle oluşmuş dört farklı tipteki simetrik katmanlı kompozit plağın ($[90_2/-45_2/45_2/0_2]_s$ (LT1), $[-45_2/45_2/90_2/0_2]_s$ (LT2), $[45_2/-45_2/0_2/90_2]_s$ (LT3) ve $[0_2/-45_2/45_2/90_2]_s$ (LT4)) farklı çökme değeri verdikleri, bu farklılığın kenar oranının (a/b) artmasıyla da belirgin bir biçimde arttığı eğrilerin eğilimlerinden görülmektedir (Şekil 2).

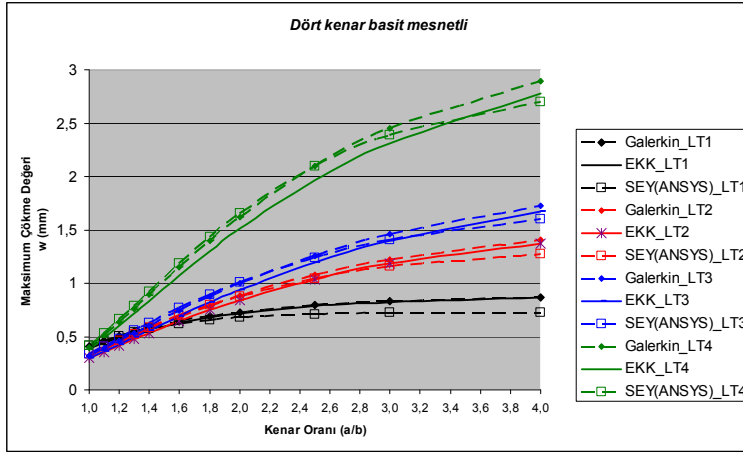
Ankastre mesnet sınır koşulunda plak kısa kenarının a kenarı olduğu durumda, aynı plakların maksimum çökme değerlerinin değiştiği görülmüştür. LT4 plağının diğer plaklara göre en az çökme değerini verdiği, LT1 plağının ise en fazla çökme değerini verdiği görülmektedir. (Şekil 3). Basit mesnet sınır koşulundaki eğrilerin eğilimlerinden, plaklar arasındaki maksimum çökme değeri sıralamasının ankastre mesnet sınır koşulundaki durumlara benzer biçimde olduğu görülmektedir (Şekil 4, 5).



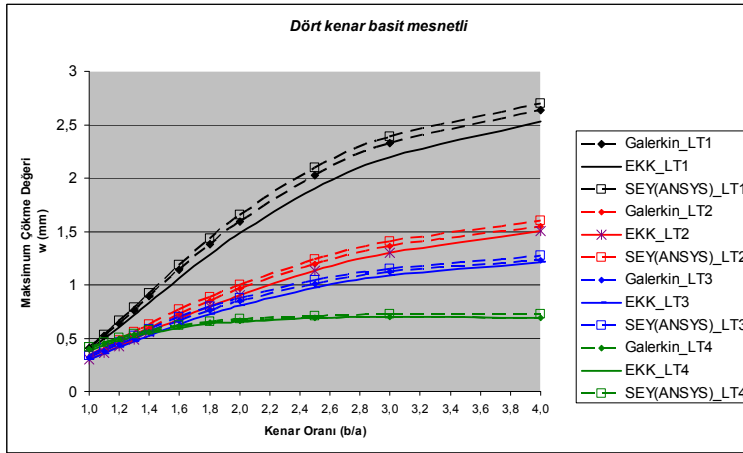
Şekil 2. Maksimum Çökme Değeri w (mm) grafiği, plak kısa kenarı b , dört kenar ankastre mesnetli



Şekil 3. Maksimum Çökme Değeri w (mm) grafiği, plak kısa kenarı a , dört kenar ankastre mesnetli



Şekil 4. Maksimum Çökme Değeri w (mm) grafiği, plak kısa kenarı b , dört kenar basit mesnetli



Şekil 5. Maksimum Çökme Değeri w (mm) grafiği, plak kısa kenarı a , dört kenar basit mesnetli

Bu çalışmada, düzgün yayılı yanal yük etkisindeki simetrik katmanlı kompozit plakların, tabaka açılarının değiştirilip, plak kısa kenarının ve boyutlarının farklı seçilmesi durumunda ankastre ve basit mesnet sınır koşullarında, maksimum çökme değerlerinin değişimi incelenmiştir. Galerkin Yöntemi ve En Küçük Kareler Yöntemi uygulamalarında integral denklemleri önce MATLAB programlama dilinde sembollere bağlı olarak boyutsuz biçimde çözülmüş, elde edilen boyutsuz sonuç denklemleri, hazırlanan bilgisayar programında kullanılarak, parametrik analiz yapılmıştır. Galerkin Yöntemi'yle hızlı olarak sonuç alınmasına vurgu yapan literatürdeki çalışmalara (11, 12) benzer biçimde, bu çalışmada da Galerkin Yöntemi'yle Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle (SEY) çözümlenme yapan ANSYS paket yazılımıyla bulunan sonuçlara yakın sonuçlar çok daha hızlı biçimde bulunmuştur. Bu durum Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle (SEY) hassas sonuç alabilmek için ANSYS yazılımında geometrinin sonlu sayıda elemana bölünüp, her parametre için ayrı hesaplama yapılmasını gerektirmesinden kaynaklanmaktadır. Çok sayıda parametrenin

araştırılacağı problemler için hızlı çözümleme yapan Galerkin Yöntemi'nin kullanılmasının avantajlı olduğu düşünülmüştür.

Kompozit tekne üretiminde, farklı tekne ana boyutları, enine veya boyuna yapı sistemleri, farklı panel boyutları, farklı panel kalınlıkları, yapının farklı bölgelerinde değişen yükleme ve sınır koşulları gibi çok sayıda parametreye bağlı oluşabilecek farklı durumlar bulunmaktadır. Kompozit teknelerin ön tasarımında, bu çalışmadakine benzer parametrik analizlerle Galerkin Yöntemi'nin uygulanmasının, teknenin farklı bölgelerinde istenen yapısal davranışa uygun cevap verecek simetrik katmanlı kompozit plakların belirlenmesinde faydalı olacağı düşünülmüştür.

REFERENCES / KAYNAKLAR

- [1] R.A. Shenoi and J.F. Wellicome, "Composite Materials in Maritime Structures", Cambridge University Pres, NY, 1993.
- [2] A.P.Mouritz et al., "Review of advanced composite structures for naval ships and structures", Composite Structures, 53 21-41, 2001.
- [3] Lekhnitskii, S.G., "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body", Holden-Day, San Francisco, 1963.
- [4] Lekhnitskii, S.G., "Anisotropic Plates, Gordon and Breach", NewYork, 1968.
- [5] Ambartsumyan, S.A., "Theory of Anisotropic Plates, Technomic Publishing", Co.,Wesport Conn., 1970.
- [6] Whitney, J.M. and Leissa A.W., "Analysis of simply supported laminated anisotropic rectangular plates", AEII Journal, 8,, 28-33, 1970.
- [7] Whitney, J.M. "Fourier analysis of clamped anisotropic rectangular plates", ASME Journal of Applied Mechanics, 38, 530-2, 1971.
- [8] Tsay, C.S. and Reddy, J.N., "Bending, stability and free vibration of thin orthotropic plates by simplified mixed finite elements", Journal of Sound and Vibration, 59, 307-11, 1978.
- [9] Leissa, A.W. and Narita, "Y. Vibration studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates", Composite Structures 12, 113-132, 1989.
- [10] Reddy, J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis", CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.
- [11] Soni P.J. and Iyengar, N.G.R., "Optimal design of clamped laminated composite plates", Fiber Sci. & Tech., 19, 281-96, 1983.
- [12] N.G.R. Iyengar and J.R. Umeriyata, "Deflection Analysis of Hybrid Laminated Composite Plates, Composite Structures", 5, 15-32, 1986.
- [13] Noor, A.K. and Burton W.S., "Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates", Appl Mech Rev; 42 (1), 1989.
- [14] Noor, A.K. and Burton W.S. "Assesment of computational model for multilayered composite plates", Appl Mech Rev; 43 (4): 67-97, 1990.
- [15] Mallikarjuna and Kant, "A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches", Composite Structures, 23 293-312, 1993.
- [16] Reddy, J.N. and Robbins Jr.D.H., "Theories and computational models for composite laminates", Appl.Mech.Rev.; 47 (6): 147-69, 1994.
- [17] Kreja, I, "A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels", Cent. Eur. J. Eng., 1 (1) 59-80, 2011.
- [18] Aran, A., "Elyaf Takviyeli Karma Malzemeler", İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı:1420, Gümüşsuyu-İstanbul, 1990.
- [19] Matlab R2006b, Symbolic Math Toolbox, MathWorks, YTÜ, 2009.
- [20] Release 9.0, Documentation for ANSYS, YTÜ, 2009.

- [21] Ergin A., Bayraktarkatal E., Ünsan Y., “Sonlu Elemanlar Metodu ve Gemi İnşaatı Sektöründeki Uygulamaları”, Yapım Matbaacılık Ltd., İstanbul, 2000.
- [22] About Composite-Learn about Plastic and Composite Material, <http://composite.about.com>, [Erişim Tarihi; 24 Ağustos 2011].
- [23] UL IDES – Plastic Materials Data Sheets& UL Yellow Cards, <http://www.ides.com>, [Erişim Tarihi; 24 Ağustos 2011].

Çizelge 5. Maksimum Çökme Değeri w (mm) sayısal sonuçları

ab	YONTEM	DORT KENAR ANKASTRE MESNETLİ						DORT KENAR BASIT MESNETLİ											
		LT1	LT2	LT3	LT4	b/a	LTI	LT1	LT2	LT3	LT4	b/a	LTI	LT1	LT2	LT3	LT4		
1,0	Galerkin	0,116	0,121	0,121	0,116		0,116	0,121	0,121	0,116		0,407	0,319	0,318	0,401	0,407	0,319	0,318	0,401
	EKK	0,100	0,046	0,046	0,101	1,0	0,100	0,046	0,046	0,101	1,0	0,389	0,299	0,298	0,382	0,389	0,299	0,298	0,382
1,1	SEY(ANSYS)	0,121	0,127	0,127	0,121		0,121	0,127	0,121		0,416	0,339	0,339	0,416	0,416	0,339	0,339	0,416	
	Galerkin	0,126	0,142	0,147	0,154		0,154	0,147	0,142	0,126		0,480	0,382	0,387	0,514	0,520	0,387	0,379	0,449
1,2	EKK	0,115	0,057	0,056	0,126	1,1	0,125	0,056	0,057	0,117	1,1	0,441	0,352	0,362	0,488	0,493	0,362	0,355	0,432
	SEY(ANSYS)	0,130	0,149	0,154	0,159		0,159	0,154	0,149	0,130		0,484	0,403	0,411	0,533	0,533	0,411	0,403	0,464
1,3	Galerkin	0,133	0,161	0,172	0,194		0,194	0,172	0,161	0,133		0,506	0,444	0,458	0,636	0,640	0,455	0,439	0,492
	EKK	0,127	0,070	0,067	0,151	1,2	0,150	0,067	0,070	0,130	1,2	0,488	0,417	0,428	0,600	0,604	0,426	0,412	0,475
1,4	SEY(ANSYS)	0,137	0,168	0,179	0,201		0,201	0,179	0,168	0,137		0,507	0,464	0,481	0,659	0,659	0,481	0,464	0,507
	Galerkin	0,138	0,178	0,195	0,235		0,235	0,195	0,178	0,138		0,548	0,506	0,529	0,762	0,765	0,524	0,498	0,528
1,5	EKK	0,138	0,085	0,080	0,177	1,3	0,177	0,081	0,085	0,141	1,3	0,531	0,476	0,495	0,716	0,719	0,490	0,469	0,513
	SEY(ANSYS)	0,142	0,186	0,203	0,243		0,243	0,203	0,186	0,142		0,543	0,525	0,554	0,790	0,790	0,554	0,525	0,543
1,6	Galerkin	0,142	0,193	0,216	0,276		0,276	0,216	0,193	0,142		0,584	0,567	0,600	0,891	0,892	0,593	0,556	0,560
	EKK	0,145	0,101	0,096	0,204	1,4	0,204	0,096	0,102	0,151	1,4	0,568	0,534	0,562	0,835	0,835	0,554	0,524	0,546
1,8	SEY(ANSYS)	0,145	0,200	0,224	0,284		0,284	0,224	0,200	0,145		0,574	0,585	0,625	0,923	0,923	0,625	0,585	0,574
	Galerkin	0,146	0,217	0,252	0,351		0,351	0,252	0,217	0,146		0,645	0,683	0,740	1,149	1,143	0,725	0,664	0,603
2,0	EKK	0,155	0,136	0,130	0,261	1,6	0,262	0,131	0,137	0,164	1,6	0,631	0,646	0,693	1,071	1,064	0,679	0,629	0,597
	SEY(ANSYS)	0,148	0,223	0,260	0,360		0,360	0,260	0,223	0,148		0,622	0,698	0,766	1,185	1,185	0,766	0,698	0,622
2,5	Galerkin	0,148	0,234	0,279	0,413		0,413	0,279	0,234	0,148		0,692	0,790	0,873	1,395	1,380	0,850	0,762	0,642
	EKK	0,158	0,170	0,169	0,319	1,8	0,322	0,170	0,173	0,173	1,8	0,680	0,749	0,819	1,298	1,283	0,797	0,724	0,634
3,0	SEY(ANSYS)	0,149	0,240	0,286	0,424		0,424	0,286	0,240	0,149		0,656	0,794	0,890	1,432	1,432	0,889	0,792	0,656
	Galerkin	0,149	0,246	0,300	0,463		0,463	0,300	0,246	0,149		0,729	0,886	0,996	1,623	1,596	0,963	0,847	0,665
4,0	EKK	0,158	0,201	0,208	0,376	2,0	0,381	0,210	0,206	0,178	2,0	0,719	0,844	0,937	1,510	1,484	0,906	0,808	0,659
	SEY(ANSYS)	0,149	0,251	0,306	0,473		0,473	0,306	0,251	0,149		0,680	0,880	1,006	1,655	1,655	1,004	0,878	0,680
2,5	Galerkin	0,150	0,264	0,331	0,539		0,539	0,331	0,264	0,150		0,792	0,981	1,259	2,099	2,031	1,195	1,013	0,692
	EKK	0,149	0,255	0,288	0,493	2,5	0,507	0,297	0,287	0,185	2,5	0,785	0,964	1,193	1,964	1,899	1,133	0,976	0,691
3,0	SEY(ANSYS)	0,149	0,265	0,334	0,545		0,545	0,334	0,265	0,149		0,711	1,045	1,241	2,097	2,097	1,241	1,045	0,711
	Galerkin	0,152	0,272	0,347	0,571		0,571	0,347	0,272	0,152		0,830	1,224	1,461	2,449	2,327	1,361	1,122	0,697
4,0	EKK	0,139	0,278	0,337	0,562	3,0	0,592	0,356	0,302	0,188	3,0	0,825	1,184	1,395	2,312	2,196	1,302	1,090	0,698
	SEY(ANSYS)	0,148	0,270	0,346	0,573		0,573	0,346	0,270	0,148		0,723	1,156	1,406	2,393	2,393	1,403	1,152	0,723
4,0	Galerkin	0,156	0,280	0,360	0,588		0,588	0,360	0,280	0,156		0,870	1,404	1,729	2,893	2,635	1,551	1,233	0,686
	EKK	0,128	0,278	0,364	0,600	4,0	0,678	0,414	0,332	0,190	4,0	0,867	1,373	1,672	2,775	2,534	1,506	1,213	0,689
	SEY(ANSYS)	0,148	0,273	0,352	0,581		0,581	0,352	0,273	0,148		0,729	1,271	1,598	2,701	2,701	1,598	1,271	0,729